

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.04.09.

Mértékcseré, Girsanov (Гирсанов) tétel

- $\mathbb{P}, Q$ valószínűségi mértékek. $Q \ll \mathbb{P}$, azaz Q abszolút folytonos $\mathbb{P}$ -re nézve, ha minden $\mathbb{P}$ nullmértékű halmaz Q nullmértékű is.

Tétel (Radon-Nikodym tétel)

$\mathbb{P}, Q$ valószínűségi mértékek $(\Omega, \mathcal{A})$ -n, $Q \ll \mathbb{P}$. Ekkor létezik $Z \geq 0$, $\mathcal{A}$ mérhető változó, hogy $Q(A) = \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_A)$, minden $A \in \mathcal{A}$ -ra.

Z a Radon-Nikodym derivált, jelölése $\frac{dQ}{d\mathbb{P}}$.

- Jelölés. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}, \mathbb{E}_Q$ a $\mathbb{P}$ ill. Q szerinti integrál.
- A $Z = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}$ összefüggést $dQ = Zd\mathbb{P}$ alakban is írhatjuk (A két oldal integrálja tetszőleges A -n ugyanaz).

Állítás

$\mathbb{P}, Q$ valószínűségi mértékek $(\Omega, \mathcal{A})$ -n, $Q \ll \mathbb{P}$ és $Z = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}$. Ha $X \sim \mathcal{A}$, akkor

$$\mathbb{E}_Q(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(ZX)$$

A két oldal egyszerre definiált és ekkor megegyeznek.

Állítás

$\mathbb{P}, Q$ valószínűségi mértékek $(\Omega, \mathcal{A})$ -n, $Q \ll \mathbb{P}$ és $Z = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}$. Ha $X_n \xrightarrow{p} X$ $\mathbb{P}$ alatt, akkor $X_n \xrightarrow{p} X$ Q alatt.

- $\mathbb{P}, Q$ valószínűségi mértékek $(\Omega, \mathcal{A})$ -n. $\mathbb{P} \approx Q$, ha $\mathbb{P}$ és Q null halmazai megegyeznek.
- $\mathbb{P} \approx Q$ pontosan akkor, ha $\mathbb{P} \ll Q$ és $Q \ll \mathbb{P}$.

Állítás

$\mathbb{P} \approx Q, Z = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}$. Ekkor

$$\mathbb{P}(Z \leq 0) = Q(Z \leq 0) = 0 \quad \text{és} \quad \frac{d\mathbb{P}}{dQ} = \frac{1}{Z}$$

•

$$0 \leq Q(Z \leq 0) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(Z \mathbb{1}_{(Z \leq 0)}\right) \leq 0$$

$\mathbb{P} \approx Q$ miatt $\{Z \leq 0\}$ $\mathbb{P}$ alatt is nullmértékű.

- $1/Z$ definiált a $\{Z \neq 0\}$ eseményen, ami teljes mértékű $\mathbb{P}$ és Q szerint is.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \{Z \neq 0\}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{(Z \neq 0)} Z \frac{1}{Z}\right) = \mathbb{E}_Q\left(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{(Z \neq 0)} \frac{1}{Z}\right)$$

Azaz $\mathbb{1}_{(Z \neq 0)} \frac{1}{Z}$ teljesíti a Radon-Nikodym derivált definícióját.

- $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ (filtrált) valószínűségi mező. Q **lokálisan ekvivalens** $\mathbb{P}$ -val, ha minden t -re $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t} \approx Q|_{\mathcal{F}_t}$. Jelölés $\mathbb{P} \approx_{loc} Q$.
- Megjegyzés. $\mathbb{P} \approx_{loc} Q$ -ból nem következik, hogy $\mathbb{P} \approx Q$. Például B és $(B_t + t)_{t \geq 0}$ eloszlása $(C[0, \infty)$ -n) lokálisan ekvivalens, de szinguláris.
- Ha $\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, akkor legyen $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$. $(Z_t)_{t \geq 0}$ neve **sűrűségi folyamat**.

Állítás

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, Z a sűrűségi folyamat, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$.

Ekkor $\mathbb{P}(Z_t > 0) = 1$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t) = 1$, $Z_t \sim \mathcal{F}_t$ minden t -re és $0 \leq s \leq t$ esetén $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t | \mathcal{F}_s) = Z_s$.

Azaz Z martingál $\mathbb{P}$ alatt.

- $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}} \implies Z_t \sim \mathcal{F}_t$ és $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t) = Q(\Omega) = 1$.
- $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t} \approx Q|_{\mathcal{F}_t} \implies \mathbb{P}(Z_t \leq 0) = 0$.
- $A \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \implies Q(A) = Q|_{\mathcal{F}_t}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t \mathbb{1}_A)$ és $Q(A) = Q|_{\mathcal{F}_s}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_s \mathbb{1}_A) \implies \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t | \mathcal{F}_s) = Z_s$, mivel $Z_s \sim \mathcal{F}_s$.

- $\mathbb{P} \approx_{loc} Q$.
- Ha M folytonos trajektóriájú $\mathbb{P}$ alatt, azaz

$$\mathbb{P}(M \text{ trajektóriája folytonos}) = \mathbb{P}(\cap_n \{M \text{ trajektóriája folytonos } [0, n]\text{-en}\}) = 1$$

- $Q(\{M \text{ trajektóriája folytonos } [0, n]\text{-en}\}) = 1$ és az M folyamat Q alatt is folytonos trajektóriájú.

Állítás

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat. Ha Z folytonos trajektóriájú, akkor Z nem éri el a nulla szintet.
 $\mathbb{P}(\forall t, Z_t > 0) = 1$.

Megjegyzés. Z folytonossága nélkül is igaz. Ha a filtráció jobbról folytonos, akkor Z -nek létezik càdlàg változata, és erre a változatra az állítás igaz marad.

- Legyen $\tau = \inf\{t \geq 0 : Z_t = 0\}$. τ megállási idő.
- $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \cap \mathcal{F}_\tau$, azaz az opcionális mintavétel tételét is használva

$$Q(\tau \leq t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t \mathbb{1}_{(\tau \leq t)}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{(\tau \leq t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t | \mathcal{F}_\tau)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{(\tau \leq t)} Z_{t \wedge \tau}) = 0$$

- $Q(\tau \leq t) = 0$, Q és $\mathbb{P}$ ekvivalens $\mathcal{F}_t$ -n, azaz $\mathbb{P}(\tau \leq t) = 0$
- $t = n$ -nel, $\mathbb{P}(\tau \leq n) = 0$ minden n -re.

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = \mathbb{P}(\cup_n (\tau \leq n)) \leq \sum_n \mathbb{P}(\tau \leq n) = 0$$

Állítás

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat. Ha Z Itô folyamat, akkor

$$Z_t = \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}[M]_t\right\}, \quad \text{ahol} \quad M_t = \log(Z_t) + \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s$$

Az állítás igaz folytonos Z -re is. De mi csak Itô folyamatokra bizonyítottuk az Itô formulát.

- Itô formula a logaritmus függvényre.

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \log x, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

•

$$\log(Z_t) = \log(Z_0) + \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{Z_s^2} d[Z]_s = M_t - \frac{1}{2}[M]_t$$

- Megjegyzés. Az Itô formulát $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre számoltuk ki. Ha $D \subset \mathbb{R}^d$ nyílt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 , X Itô, $\mathbb{P}(X_t \in D) = 1$ minden t -re, akkor az Itô formula érvényben marad.

Állítás

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat.

- M pontosan akkor martingál Q alatt, ha ZM martingál $\mathbb{P}$ alatt.

Tegyük fel, hogy M martingál Q alatt. Ekkor

- $M_t \sim \mathcal{F}_t$, vagyis $(MZ)_t \sim \mathcal{F}_t$
- $|M_t| \in L^1(Q)$, azaz $\mathbb{E}_Q(|M_t|) = \mathbb{E}_P(|(ZM)_t|) < \infty$.
- Ha $0 \leq s \leq t$, $A \in \mathcal{F}_s$, akkor $M_t \mathbb{1}_A \sim \mathcal{F}_t$ és $M_s \mathbb{1}_A \sim \mathcal{F}_s$ miatt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t M_t \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_Q(M_t \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_Q(M_s \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_s M_s \mathbb{1}_A)$$

Azaz ha M Q -martingál, akkor ZM $\mathbb{P}$ -martingál.

Állítás

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat.

- M pontosan akkor martingál Q alatt, ha ZM martingál $\mathbb{P}$ alatt.

- Beláttuk, hogy ha M martingál Q alatt, akkor

$$\left(M_t \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}} \right)_{t \geq 0} \quad \mathbb{P}\text{-martingál}$$

- Szerepcserével, ha N martingál $\mathbb{P}$ alatt, akkor

$$\left(N_t \frac{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}{dQ|_{\mathcal{F}_t}} \right)_{t \geq 0} = \left(N_t \frac{1}{Z_t} \right)_{t \geq 0} \quad Q\text{-martingál}$$

- Ha $N = MZ$ martingál $\mathbb{P}$ alatt, akkor $N/Z = MZ/Z = M$ martingál Q alatt.

Állítás

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat.

- Z, M folytonos trajektóriájú. M pontosan akkor lokális martingál Q alatt, ha ZM lokális martingál $\mathbb{P}$ alatt.
- M folytonos trajektóriájú Q -lokális martingál. Ha $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$ akkor $\tau_n \leq \tau_{n+1} \rightarrow \infty$ megállási idő sorozat, M^{τ_n} Q -martingál minden n -re.
- Cél. $(MZ)^{\tau_n}$ $\mathbb{P}$ -martingál.
- M^{τ_n} Q martingál, ezért $M^{\tau_n} Z$ $\mathbb{P}$ -martingál.
- Martingál megállítása martingált ad, vagyis $(M^{\tau_n} Z)^{\tau_n} = (MZ)^{\tau_n}$ $\mathbb{P}$ -martingál.

Tétel

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{Q|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$. Tegyük fel, hogy Z Itô folyamat. Láttuk, hogy ekkor $Z_t = \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}[M]_t\right\}$, ahol $M_t = \log Z_t + \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s$. Ekkor

$$B \text{ Brown mozgás } \mathbb{P} \text{ alatt} \iff \tilde{B} = B - [B, M] \text{ Brown mozgás } Q \text{ alatt}$$

- Tegyük fel B $\mathbb{P}$ -Brown mozgás. A parciális integrálás formulájából

$$\begin{aligned} (\tilde{B}Z)_t &= \int_0^t \tilde{B}_s dZ_s + \int_0^t Z_s d(B - [B, M])_s + [B, Z]_t \\ &= \int_0^t \tilde{B}_s dZ_s + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t Z_s \frac{1}{Z_s} d[B, Z] + [B, Z]_t = \int_0^t \tilde{B}_s dZ_s + \int_0^t Z_s dB_s \end{aligned}$$

- $\tilde{B}Z$ lokális martingál $\mathbb{P}$ alatt, azaz $\tilde{B}$ lokális martingál Q alatt.
- $\tilde{B}_0 = 0$, $\tilde{B}$ folytonos trajektóriájú, és $[\tilde{B}]_t = [B]_t = t$. ($\mathbb{P}$ és Q alatt $\mathcal{F}_t$ mérhető változók egyszerre konvergensek sztochasztikusan).
- Lévy karakterizáció szerint $\tilde{B}$ Brown mozgás Q alatt.

Tétel

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{Q|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$. Tegyük fel, hogy Z Itô folyamat. Ekkor

$$B \text{ Brown mozgás } \mathbb{P} \text{ alatt} \iff \tilde{B} = B - [B, M] \text{ Brown mozgás } Q \text{ alatt}$$

- Beláttuk, hogy ha $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ és B $\mathbb{P}$ -Brown mozgás, akkor

$$\tilde{B}_t = B_t - [B, M]_t = B_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[B, Z]_s \quad \text{Brown mozgás } Q \text{ alatt.}$$

- $\mathbb{P}, Q$ szerepcseréjével, ha $\tilde{B}$ Q -Brown mozgás, akkor

$$\tilde{\tilde{B}}_t = \tilde{B}_t - \int_0^t Z_s d[B, 1/Z]_s \quad \text{Brown mozgás } \mathbb{P} \text{ alatt.}$$

- Itô formula $1/Z$ -re. $f(x) = 1/x$, $f'(x) = -1/x^2$, $f''(x) = 2/x^3$

$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{Z_0} - \int_0^t \frac{1}{Z_s^2} dZ_s + \int_0^t \frac{1}{Z_s^3} d[Z]_s$$

Tétel

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{Q|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$. Tegyük fel, hogy Z Itô folyamat. Ekkor

$$B \text{ Brown mozgás } \mathbb{P} \text{ alatt} \iff \tilde{B} = B - [B, M] \text{ Brown mozgás } Q \text{ alatt}$$

- $\mathbb{P}, Q$ szerepcseréjével, ha $\tilde{B}$ Q -Brown mozgás, akkor

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[B, Z]_s - \int_0^t Z_s d[B, 1/Z]_s \quad \text{Brown mozgás } \mathbb{P} \text{ alatt.}$$

- Itô formula $1/Z$ -re. $f(x) = 1/x$, $f'(x) = -1/x^2$, $f''(x) = 2/x^3$

$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{Z_0} - \int_0^t \frac{1}{Z_s^2} dZ_s + \int_0^t \frac{1}{Z_s^3} d[Z]_s$$

•

$$[B, 1/Z]_t = - \int_0^t \frac{1}{Z_s^2} d[B, Z]_s, \quad - \int_0^t Z_s d[B, 1/Z]_s = \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[B, Z]_s, \quad \tilde{B}_t = B_t$$

Tétel

$\mathbb{P} \approx Q$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat. N folytonos trajektóriájú folyamat.

$$N \text{ lokális martingál } \mathbb{P}\text{-alatt} \iff \tilde{N}_t = N_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[N, Z]_s \text{ lokális martingál } Q\text{-alatt}$$

$$\text{és } [N] = [\tilde{N}].$$

Bizonyítás csak arra az esetre, ha $N, \tilde{N}, Z$ Itô folyamat. Ha Z nem folytonos trajektóriájú, akkor $\mathcal{F}$ jobbról folytonossága is kell és ebben az esetben Z választható càdlàg-nak.

•

$$Z = e^{M - \frac{1}{2}M}, \quad \text{ahol} \quad M_t = \log Z_t + \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s \quad \text{és} \quad N_t = N_0 + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

•

$$\tilde{N}_t = N_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[N, Z]_s = N_0 + \int_0^t \sigma_s dB_s - \int_0^t \sigma_s \frac{1}{Z_s} d[B, Z]_s = N_0 + \int_0^t \sigma_s d\tilde{B}_s$$

• $[N]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds = [\tilde{N}]_t.$

- B Brown mozgás, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $dQ_T = \exp\{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\} d\mathbb{P}$ minden $T \geq 0$ -ra valószínűségi mérték. Q_T sűrűségi folyamata

$$Z_t = \mathbb{E}(\exp\{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\} \mid \mathcal{F}_t) = \exp\{\lambda B_{T \wedge t} - \frac{1}{2}\lambda^2 T \wedge t\}$$

•

$$Z = e^{M - \frac{1}{2}[M]}, \quad M_t = \int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq T)} \lambda dB_s \quad \tilde{B}_t = B_t - [B, M]_t = B_t - \int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq T)} \lambda ds = B_t - \lambda(T \wedge t)$$

- Q_T alatt B driftes BM

$$B_t = \tilde{B}_t + \lambda(T \wedge t) = \tilde{B}_t + \int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq T)} \lambda ds$$

ahol $\tilde{B}$ Brown mozgás Q_T alatt.

- $X_t = B_t + \lambda t$, $S_t(X) = \max_{u \leq t} X_u$. Cél $S_t(X)$ eloszlása.
- $y > 0$

$$\mathbb{P}(S(X)_T \geq y) = Q(S_T(B) \geq y), \quad \text{ahol} \quad \frac{dQ}{d\mathbb{P}} = e^{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}$$

- $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t = y\}$, $\tilde{B}_t = 2B_{t \wedge \tau} - B_t$. $\tilde{B}$ a tükrözött Brown mozgás.

$$\begin{aligned} Q(S_T(B) \geq y) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(S_T \geq y)} e^{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(B_T \geq y)} e^{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(\tilde{B}_T > y)} e^{\lambda(2y - \tilde{B}_T) - \frac{1}{2}\lambda^2 T}\right) \\ &= Q(B_T \geq y) + e^{2\lambda y} Q(B_T < -y) \\ &= \mathbb{P}(B_T + \lambda T \geq y) + e^{2\lambda y} \mathbb{P}(B_T + \lambda T \leq -y) \\ &= \mathbb{P}(X_T \geq y) + e^{2\lambda y} \mathbb{P}(X_T \leq -y) \end{aligned}$$

- Részletek:

$$\{S_T \geq y\} = \{B_T \geq y\} \cup \{\tilde{B}_T > y\}, \quad \mathbb{1}_{(\tau \leq T)} B_T = \mathbb{1}_{(\tau \leq T)} (2B_{T \wedge \tau} - \tilde{B}_T) = \mathbb{1}_{(\tau \leq T)} (2y - \tilde{B}_T)$$

$(S_T(X), X_T)$ együttes eloszlása

- $X_t = B_t + \lambda t$, $S_T(X) = \max_{u \leq T} X_u$. Cél $\mathbb{P}(S_T(X) > y, X_T < x)$, ha $x < y$ és $y > 0$.
- Mértékcsereével, $dQ = e^{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T} d\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}(S_T(X) > y, X_T < x) = Q(S_T(B) > y, B_T < x) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(S_T > y, B_T < x)} e^{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}\right)$$

- $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t = y\}$, $\tilde{B}_t = 2B_{t \wedge \tau} - B_t$ a tükrözött Brown mozgás.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(S_T > y, B_T < x)} e^{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(\tilde{B}_T > 2y - x)} e^{\lambda(2y - \tilde{B}_T) - \frac{1}{2}\lambda^2 T}\right) \\ &= e^{2\lambda y} Q(-B_T > 2y - x) \\ &= e^{2\lambda y} \mathbb{P}(B_T + \lambda T < -(2y - x))\end{aligned}$$

- Összefoglalva

$$\mathbb{P}(S_T(X) \geq y, X_T < x) = e^{2\lambda y} \mathbb{P}(X_T < -(2y - x)), \quad \text{ha } y > 0 \text{ és } x < y.$$

- B Brown mozgás, $a > 0$, $\tau = m_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$
- $B_t \stackrel{d}{=} \sqrt{t}Z$, ahol $Z \sim N(0, 1)$

$$\mathbb{P}(\tau \leq t) = \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq u \leq t} B_u \geq a\right) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a) = \mathbb{P}(tZ^2 \geq a^2) = \mathbb{P}\left(\frac{a^2}{Z^2} \leq t\right)$$

- Összefoglalva, tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$m_a \stackrel{d}{=} \frac{a^2}{Z^2} \quad \text{ahol } Z \sim N(0, 1)$$

- $Z^2 \sim \Gamma_{1/2, 1/2}$, $\varphi(x) = a^2/x$,

$$f_{a^2/Z^2} = f_{\varphi(Z^2)} = (f_{Z^2} \circ \varphi^{-1}) \cdot |(\varphi^{-1})'|$$

- Itt

$$f_{Z^2}(t) = \mathbb{1}_{(t>0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-1/2} e^{-t/2}, \quad \text{és} \quad \varphi^{-1}(t) = a^2/t$$

- Kendall azonosság

$$f_{m_a}(t) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/(2t)} = \frac{|a|}{t} f_{B_t}(a)$$

- $X_t = B_t + \lambda t$, $\tau(X) = \inf\{t \geq 0 : X_t = y\}$.
- Ha $\lambda > 0$, $y < 0$, vagy $\lambda < 0$, $y > 0$, akkor $\mathbb{P}(\tau = \infty) > 0$.
- $\lambda, y > 0$, mértékcsereével és $\tau = \tau(B)$ jelöléssel

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau(X) \leq t) &= Q(\tau(B) \leq t) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(\tau \leq t)} e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(\tau \leq t)} \mathbb{E}\left(e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t} \mid \mathcal{F}_\tau\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(\tau \leq t)} e^{\lambda y - \frac{1}{2}\lambda^2 \tau}\right) = \int \mathbb{1}_{(s \leq t)} e^{\lambda y - \frac{1}{2}\lambda^2 s} f_\tau(s) ds\end{aligned}$$

•

$$f_{\tau(X)}(s) = e^{\lambda y - \frac{1}{2}\lambda^2 s} f_\tau(s) = e^{\lambda y - \frac{1}{2}\lambda^2 s} \frac{|y|}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{y^2}{2s}} \mathbb{1}_{(s>0)} = \frac{|y|}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(y-\lambda s)^2}{2s}} \mathbb{1}_{(s>0)} = \frac{|y|}{s} f_{X_s}(y) \mathbb{1}_{(s>0)}$$

- B Brown mozgás $d = \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}$.
- $\beta_t = B_{1+t} - B_1$ jelöléssel $(\beta_t)_{t \geq 0}$ a Markov tulajdonság alapján $\mathcal{F}_1$ -től független Brown mozgás, $m_a = \inf\{t \geq 0 : \beta_t = a\}$ a β szintelérési ideje.

•

$$\{d \leq 1 + t\} = \{m_{-B_1} \leq t\}$$

•

$$\mathbb{P}(d \leq 1 + t \mid \mathcal{F}_1) = \mathbb{P}(m_a \leq t) \big|_{a=-B_1}$$

- $Z \sim N(0, 1)$ független B_1 -től

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{B_1^2}{Z^2} \leq t, B_1 \in H\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(B_1 \in H)} \mathbb{P}\left(\frac{a^2}{Z^2} \leq t\right) \big|_{a=-B_1}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(B_1 \in H)} \mathbb{P}(m_a \leq t) \big|_{a=-B_1}\right) = \mathbb{P}(B_1 \in H, d \leq 1 + t) \end{aligned}$$

- Összefoglalva

$$(B_1, d) \stackrel{d}{=} \left(B_1, \frac{B_1^2}{Z^2} + 1\right), \quad \text{ahol } Z \sim N(0, 1) \text{ független } B_1\text{-től}$$

•

$$d = \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}, \quad g = \max\{t \in [0, 1] : B_t = 0\}$$

- $Z \sim N(0, 1)$ független B_1 -től, $\varphi = \arg(B_1, Z) \sim U(0, 2\pi)$

$$g \stackrel{d}{=} \frac{1}{d} \stackrel{d}{=} \frac{Z^2}{Z^2 + B_1^2} = \sin^2 \varphi$$

- $t \in [0, 1]$ -re

$$\mathbb{P}(g < t) = \mathbb{P}(|\sin \varphi| < \sqrt{t}) = \frac{4 \arcsin \sqrt{t}}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}$$

Az egy előtti utolsó nullhely arkusz szinusz eloszlású

Ez azonos a Béta($1/2, 1/2$) eloszlással, ugyanis a sűrűségfüggvénye a $t \in (0, 1)$ -re

$$f_g(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \arcsin \sqrt{t} = \frac{1}{\pi \sqrt{t(1-t)}}$$

•

$$d = \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}, \quad g = \max\{t \in [0, 1] : B_t = 0\}$$

• $\beta_t = tB_{1/t}, \beta_1 = B_1$

• Ha $Z \sim N(0, 1)$ független B_1 -től, akkor

$$\left(\frac{1}{g}, B_1\right) = (d(\beta), \beta_1) \stackrel{d}{=} \left(\frac{\beta_1^2}{Z^2} + 1, \beta_1\right) = \left(\frac{B_1^2}{Z^2} + 1, B_1\right) \quad \text{azaz} \quad (g, B_1) \stackrel{d}{=} \left(\frac{Z^2}{Z^2 + B_1^2}, B_1\right)$$

• $X_t = B_t + \lambda t$, $g(X)$ eloszlása mértékcsereével, $t \in (0, 1)$ -re

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(g(X) \leq t) &= Q(g(B) \leq t) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(g \leq t)} e^{\lambda B_1 - \frac{1}{2}\lambda^2}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\left(\frac{Z^2}{Z^2 + B_1^2} \leq t\right)} e^{\lambda B_1 - \frac{1}{2}\lambda^2}\right) \\ &= Q\left(\frac{Z^2}{Z^2 + B_1^2} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\frac{Z^2}{Z^2 + X_1^2} \leq t\right), \quad \text{azaz} \quad g(X) \stackrel{d}{=} \frac{Z^2}{Z^2 + X_1^2}, \quad \text{ahol } Z \perp X_1. \end{aligned}$$

• Kihasználtuk, hogy Q alatt Z és B_1 függetlenek.

Definíció

$B = (B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$ d -dimenziós Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha

- $B_0 = 0$, B folytonos trajektóriájú, azaz $B^{(i)}$ nullából induló, folytonos trajektóriájú $i = 1, \dots, d$.
- B adaptált $\mathcal{F}$ -hez, azaz $B^{(i)}$ adaptált $\mathcal{F}$ -hez $i = 1, \dots, d$.
- $0 \leq s \leq t$ esetén $B_t - B_s \sim N(0, (t-s)I_d)$ és $B_t - B_s \perp \mathcal{F}_s$.

Jelölés: $BM-d$

Állítás

B $BM-d$ $\mathcal{F}$ -ben pontosan akkor, ha minden $\vartheta \in \mathbb{R}^d$, $\|\vartheta\| = 1$ -re $\vartheta^T B$ egy dimenziós Brown mozgás $\mathcal{F}$ -ben.

- $\Rightarrow \vartheta^T B$ teljesíti a definíciót.

- $\Leftarrow$

$\vartheta = (1, 0, \dots)$ választással $B^{(1)}$ $BM-1$. Adaptált, folytonos trajektóriájú, nullából indul.

Hasonlóan a többi koordinátára.

$\alpha \neq 0$ esetén $\alpha = r\vartheta$ és $\mathbb{E}(e^{i\alpha \cdot (B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s) = e^{-r^2(t-s)/2} \implies B_t - B_s \perp \mathcal{F}_s$ és a megfelelő eloszlású.

Állítás (Martingál karakterizáció)

B nullából induló, folytonos trajektóriájú, $\mathcal{F}$ -adaptált d dimenziós folyamat.

B pontosan akkor BM- d $\mathcal{F}$ -ben, ha minden $\alpha \in \mathbb{R}^d$ -re $\exp\{i\alpha \cdot B + \frac{1}{2}\|\alpha\|^2 t\}$ lokális martingál $\mathcal{F}$ -ben.

- $\mathbb{R}^d \ni \alpha = \|\alpha\|\vartheta, \|\vartheta\| = 1$.
- Ha B BM- d , akkor $\beta = \vartheta \cdot B$ BM-1 az előző állítás alapján és

$$\exp\{i\alpha \cdot B + \frac{1}{2}\|\alpha\|^2 t\} = \exp\{i\|\alpha\|\beta_t + \frac{1}{2}\|\alpha\|^2 t\}$$

martingál a BM-1-re bizonyított martingál karakterizációból.

- Megfordítva, $\vartheta \in \mathbb{R}^d, \|\vartheta\| = 1, \beta = \vartheta \cdot B$. Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor legyen $\alpha = a\vartheta$. A feltétel alapján

$$\exp\{ia\beta_t + \frac{1}{2}a^2 t\} = \exp\{i\alpha \cdot B + \frac{1}{2}\|\alpha\|^2 t\} \quad \text{lok. mart. minden } a \in \mathbb{R},$$

azaz $\beta = \vartheta \cdot B$ BM-1 a BM-1-re bizonyított martingál karakterizációból.

Ez minden ϑ egység vektorra igaz, vagyis B BM- d az előző állítás alapján.

Állítás (Lévy karakterizáció)

B nullából induló, folytonos trajektóriájú, d dimenziós lokális martingál.

B pontosan akkor BM- d $\mathcal{F}$ -ben, ha minden $[B]_t = tI_d$

Megjegyzés. Ha $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$ BM- d , akkor $B^{(i)} = e_i \cdot B$, ahol e_i minden koordinátája nulla kivéve az i -et ami 1. Ezért $B^{(i)}$ BM-1 és így Itô folyamat, azaz a $[B^{(i)}, B^{(j)}]$ zárójel folyamatok léteznek.

- Ha B BM- d és $\mathbb{R}^d \ni \alpha = \|\alpha\| \vartheta$, ahol $\|\vartheta\| = 1$, akkor $\beta = \vartheta \cdot B$ BM-1, így

$$[\alpha \cdot B]_t = \alpha^T [B]_t \alpha = [\|\alpha\| \beta]_t = \|\alpha\|^2 t$$

- Azt kaptuk, hogy

$$\alpha^T \frac{1}{t} [B]_t \alpha = \|\alpha\|^2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^d$$

Ebből $\frac{1}{t} [B]_t = I_d$ és $[B]_t = tI_d$ következik (ld. következő dia).

- Megfordítva, $[B]_t = tI_d$. Legyen ϑ egységvektor és $\beta = \vartheta \cdot B$. Ekkor $[\beta]_t = \vartheta^T [B]_t \vartheta = t$. Az egy dimenziós Lévy karakterizáció alapján β BM-1. Ez minden ϑ egységvektorra igaz, tehát B BM- d .

Állítás

Ha $A = A^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ és $x^T A x = \|x\|^2$ minden $x \in \mathbb{R}^d$, akkor $A = I_d$.

- Polarizációs azonosság és $A = A^T$

$$x^T y = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{4}((x + y)^T A (x + y) - (x - y)^T A (x - y)) = \frac{1}{2}(x^T A y + y^T A x) = x^T A y$$

- Ebből $Ay = cy$ és $y^T A y = c\|y\|^2$, vagyis $Ay = y$
- $A = I_d$.

Állítás

Ha B BM- d , akkor B d -dimenziós, folytonos trajektóriájú Gauss folyamat, $\mathbb{E}(B_t) = 0$ és $\text{cov}(B_s, B_t) = (s \wedge t)I_d$.

B növekményei független normális vektorváltozók, az egy dimenziós esetre látott számolás átvihető. (HF.)

Állítás

$B = (B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$ BM- d $\mathcal{F}$ -ben pontosan akkor, ha $B^{(1)}, \dots, B^{(d)}$ független Brown mozgások $\mathcal{F}$ -ben.

- $B^{(i)}$ BM-1, korábbi megjegyzés.
- $B^{(1)}, \dots, B^{(d)}$ függetlenségéhez elég, hogy tetszőleges $t_1, \dots, t_r$ -re, az

$$Y_i = (B_{t_1}^{(i)}, \dots, B_{t_r}^{(i)})$$

vektorváltozók függetlenek. $(Y_1, \dots, Y_d)$ együttesen normális, mert B Gauss, és a kereszt kovarianciák nullák (HF), azaz $Y_1, \dots, Y_d$ függetlenek.

Állítás

$B = (B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$ BM- d $\mathcal{F}$ -ben pontosan akkor, ha $B^{(1)}, \dots, B^{(d)}$ független Brown mozgások $\mathcal{F}$ -ben.

Ha $B^{(1)}, \dots, B^{(d)}$ független Brown mozgások, akkor B nullából induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál $\mathcal{F}$ -ben, és alábbi lemma miatt $[B]_t = tI_d$. A Lévy karakterizáció alapján B BM- d .

Lemma

Ha X, Y független Brown mozgások, akkor $[X, Y] \equiv 0$.

- $s < t$ -re $\mathbb{E}((X_t - X_s)(Y_t - Y_s)) = 0$, $\mathbb{E}((X_t - X_s)^2(Y_t - Y_s)^2) = (t - s)^2$.
- Legyen $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r = t$ a $[0, t]$ felosztása $\Delta_i X = X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$ és $\Delta_i Y = Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}$

$$Q = \sum_i \Delta_i X \Delta_i Y, \quad \text{akkor} \quad \mathbb{E}(Q) = 0, \quad \mathbb{E}(Q^2) = \sum_i (t_{i+1} - t_i)^2$$

ugyanis

$$\mathbb{E}(\Delta_i X \Delta_i Y \Delta_j X \Delta_j Y) = \mathbb{E}(\Delta_i X \Delta_j X) \mathbb{E}(\Delta_i Y \Delta_j Y) \quad \text{és} \quad \mathbb{E}(\Delta_i X \Delta_j X) = \mathbb{E}(\Delta_i X) \mathbb{E}(\Delta_j X) = 0.$$

- Ha $\max t_{i+1} - t_i \rightarrow 0$, akkor $Q \xrightarrow{p} 0$ és $[X, Y]_t = 0$.

Tétel

B BM- d ($\mathcal{F}$ -ben), $f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Ekkor

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t (f_t + \frac{1}{2} \Delta f)(s, B_s) ds + \int_0^t f_x(s, B_s) \cdot dB_s$$

$\Delta f = \sum_i f_{x_i, x_i}$ a térváltozó szerinti második derivált mátrix nyoma és

$$\int_0^t f_x(s, B_s) \cdot dB_s = \sum_i \int_0^t (\partial_{x_i} f)(s, B_s) dB_s^{(i)}$$

- Ez nem más mint az Itô formula több dimenziós Itô folyamatra.
- $X_t = (t, B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})$ $d + 1$ -dimenziós Itô folyamat.
-

$$[X^{(i)}, X^{(j)}]_t = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j, \text{ vagy } i, j = 1 \text{ (} X_t^{(1)} = t \text{)} \\ t & \text{ha } i = j > 1 \end{cases}$$

Tétel (Bizonyítás vázlat később)

B BM-d, $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s : s \leq t\})$. $\mathcal{F} = \mathcal{F}^B$ a B természetes filtrációja.

Ha M lokális martingál $\mathcal{F}$ -ben, akkor létezik $\sigma \in \mathcal{L}$ úgy, hogy

$$M_t = M_0 + \int_0^t \sigma_s \cdot dB_s = M_0 + \sum_{i=1}^d \int_0^t \sigma_s^{(i)} dB_s^{(i)}$$

Következmény

Ha M lokális martingál egy d dimenziós Brown mozgás természetes filtrációjában, akkor M folytonos trajektóriájú, és M Itô folyamat.

Itt

$$M_t = M_0 + \int_0^t |\sigma_s| d\beta_s, \quad \beta_t = \int_0^t \frac{\sigma_s}{|\sigma_s|} \mathbb{1}_{(\sigma_s \neq 0)} \cdot dB_s + \int_0^t \mathbb{1}_{(\sigma_s = 0)} dB_s^{(1)}, \quad [\beta]_t = t \text{ minden } t \geq 0, \beta \text{ Brown mozgás } \mathcal{F}$$

Később kiszámoljuk általánosabban is, hogy Itô folyamatok összege is Itô folyamat.

Példa arra, hogy $\mathcal{F} = \mathcal{F}^B$ nélkül a reprezentációs általában nem igaz

- (X, Y) két dimenziós Brown mozgás, $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s, Y_s : s \leq t\})$.
- Ekkor X Brown mozgás $\mathcal{F}$ -ben, de nem írható fel minden $\mathcal{F}$ lokális martingál X szerinti integrálként.
- Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik $\sigma \in \mathcal{L}$ úgy, hogy

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma_s dX_s = I_t^X(\sigma)$$

- Ekkor a zárójel kiszámítására szolgáló formula alapján

$$[Y]_t = [I^X(\sigma), Y] = \int_0^t \sigma_s d[X, Y]_s = 0$$

másrészt $[Y]_t = t$, mert Y Brown mozgás.

Ez ellentmondás, Y -t nem lehet X integráljaként felírni.

Ebben a példában X Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, de nem minden martingál „reprezentálható” X segítségével.

$\mathcal{F} = \mathcal{F}^B$ **elégséges** feltétel a B reprezentáló tulajdonságához, de **nem szükséges feltétel**.

Tétel

Legyen B d dimenziós Brown mozgás és $\mathcal{F}$ a természetes filtrációja.

$Q \approx_{loc} \mathbb{P}$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat. Ha $\sigma \in \mathcal{L}$ -re

$$\hat{B}_t = B_t - \int_0^t \sigma_s ds \quad Q \text{ BM-d } \mathcal{F}\text{-ben, akkor} \quad Z_t = \exp\left\{\int_0^t \sigma_s \cdot dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma_s\|^2 ds\right\}$$

- A Z sűrűségi folyamat martingál a B d -dimenziós Brown mozgás természetes filtrációjában, ezért Itô folyamat. Logaritmusa

$$M_t - \frac{1}{2}[M]_t \quad \text{alakú, ahol} \quad M_t = \log Z_t + \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s = \int_0^t \varphi_s \cdot dB_s$$

Kihasználtuk, hogy $Z_0 \sim \mathcal{F}_0$, miatt Z_0 konstans és $\mathbb{E}(Z_0) = 1$ miatt $Z_0 = 1$.

- A Girsanov tétel szerint

$$\tilde{B}_t = B_t - [B, M]_t = B_t - \int_0^t \varphi_s ds, \quad \text{Brown mozgás } Q \text{ alatt.}$$

Tétel

Legyen B d dimenziós Brown mozgás és $\mathcal{F}$ a természetes filtrációja.

$Q \approx_{loc} \mathbb{P}$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat. Ha $\sigma \in \mathcal{L}$ -re

$$\hat{B}_t = B_t - \int_0^t \sigma_s ds \quad Q \text{ BM-d } \mathcal{F}\text{-ben, akkor} \quad Z_t = \exp\left\{\int_0^t \sigma_s \cdot dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma_s\|^2 ds\right\}$$

- $$Z_t = \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}[M]_t\right\}, \quad \text{ahol} \quad M_t = \int_0^t \varphi_s \cdot dB_s \quad \text{és} \quad \tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \varphi_s ds, \quad Q\text{-BM}$$
- A feltevés szerint $\hat{B}$ is az, vagyis
$$(\hat{B} - \tilde{B})_t = \int_0^t (\varphi - \sigma)_s ds, \quad d\text{-dimenziós, nullából induló, korlátos változású, martingál}$$
- $\hat{B} - \tilde{B}$ minden koordináta folyamata nulla, azaz $\varphi = \sigma \, dt \times d\mathbb{P}$ majdnem mindenütt és Z a megadott alakú.

- Kérdés. Adott

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s = X_0 + \int_0^t \sigma_s (dB_s + \frac{\mu_s}{\sigma_s} ds)$$

Itô folyamat az $\mathcal{F}$ filtrációban. Létezik-e olyan Q lokálisan ekvivalens mérték, ami alatt X lokális martingál.

- Természetes jelölt a sűrűségi folyamatra

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t \varphi_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \varphi_s^2 ds\right\}, \quad \text{ahol} \quad \varphi = \frac{\mu}{\sigma}$$

- Ha Z valóban sűrűségi folyamat, akkor martingál.
- Tudunk-e feltételt adni arra, hogy egy exponenciális lokális martingál valódi martingál legyen.

Tétel

Legyen $Z = \exp\{M - \frac{1}{2}[M]\}$, ahol M nullából induló folytonos trajektóriájú lokális martingál.

Ha $\mathbb{E}(\exp\{\frac{1}{2}[M]_t\}) < \infty$ minden t -re, akkor Z martingál.

A számolás egy részében Itô kalkulussal ellenőrizzük, hogy a fellépő folyamatok lokális martingálok, ezért csak Itô folyamatok esetére lesz hiánytalan az érvelés.

Következmény

Ha B BM-d, $\varphi \in \mathcal{L}$ korlátos, $M = \int_0^t \varphi_s \cdot dB_s$,

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t \varphi_s \cdot dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\varphi_s\|^2 ds\right\}.$$

Ekkor Z martingál.

Itt $[M]_t = \int_0^t \|\varphi_s\|^2 ds \leq Kt$ és $\mathbb{E}(e^{\frac{1}{2}[M]_t}) \leq e^{Kt} < \infty$.

Nem negatív, folytonos trajektóriájú lokális martingálok I.

Lemma

$Z \geq 0$ egyből induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál. Ekkor Z szupermartingál.

Tetszőleges τ megállási időre

$$\mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau}) \leq 1$$

- Létezik (τ_n) megállási idő sorozat, $\tau_n \rightarrow \infty$ és Z^{τ_n} martingál.

- $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_s) = Z_{s \wedge \tau_n} \rightarrow Z_s$$

- Fatou lemma

$$\mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_{t \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_s\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_s) = Z_s$$

- Ha most τ megállási idő, akkor $0 \leq Z_{t \wedge \tau}^{\tau_n} \rightarrow Z_{t \wedge \tau}$ és a Fatou lemma miatt

$$\mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau}) \leq \liminf \mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau}^{\tau_n}) = \liminf \mathbb{E}(Z_0^{\tau_n}) = 1$$

hiszen

$$\mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau}^{\tau_n}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau}^{\tau_n} | \mathcal{F}_\tau)) = \mathbb{E}(Z_t^{\tau_n}) = \mathbb{E}(Z_0^{\tau_n}) = \mathbb{E}(Z_0 \mathbb{1}_{(\tau_n > 0)})$$

Lemma

$Z \geq 0$ egyből induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Z martingál.
2. $\mathbb{E}(Z_t) = 1$ minden t -re.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{P}(\max_{u \leq t} Z_u \geq n) = 0$ minden t -re.

- (1) $\implies$ (2) világos.
- (2) $\implies$ (1). Mivel Z szuper martingál, ezért $0 \leq s \leq t$ esetén

$$Z_s \geq \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s), \quad 0 = \mathbb{E}(Z_s - Z_t) = \mathbb{E}(Z_s - \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s))$$

azaz $Z_s - \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s)$ nem negatív változó, nulla várható értékű, ezért 0 és $Z_s = \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s)$.

Lemma

$Z \geq 0$ egyből induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Z martingál.
2. $\mathbb{E}(Z_t) = 1$ minden t -re.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{P}(\max_{u \leq t} Z_u \geq n) = 0$ minden t -re.

(2) $\implies$ (3).

- $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : Z_t \geq n\}$.
- $\tau_n \leq t$ pontosan akkor, ha $\max_{u \leq t} Z_u \geq n$, így $n\mathbb{P}(\max_{u \leq t} Z_u \geq n) = \mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)})$.
- Z^{τ_n} korlátos lokális martingál, vagyis martingál, amiből $\mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau_n}) = \mathbb{E}(Z_0) = 1$ és

$$0 = \mathbb{E}(Z_t) - \mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau_n}) = \mathbb{E}(Z_t - Z_{t \wedge \tau_n}) = \mathbb{E}((Z_t - Z_{t \wedge \tau_n}) \mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)}).$$

Innen

$$n\mathbb{P}\left(\max_{u \leq t} Z_u \geq n\right) = \mathbb{E}(Z_t \mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)}) \rightarrow 0 \quad \text{ha } n \rightarrow \infty$$

a dominált konvergencia tétel miatt, hiszen $\mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)} \rightarrow 0$ egy valószínűséggel Z folytonossága miatt.