

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.04.03.

Tétel

B Brown mozgás, τ egy valószínűséggel véges megállási idő $\mathcal{F}$ -ben. $X_t = B_{\tau+t} - B_\tau$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau+t}$.

Ekkor X Brown mozgás $\mathcal{G}$ -ben.

- A martingál karakterizáció alapján elég, hogy

$$M_t = \exp\left\{i\alpha X_t + \frac{\alpha^2}{2}t\right\} \quad \text{lokális martingál } \mathcal{G}\text{-ben minden } \alpha \in \mathbb{R}\text{-re}$$

•

$$M_t = \frac{N_{\tau+t}}{N_\tau}, \quad \text{ahol} \quad N_t = \exp\left\{i\alpha B_t + \frac{\alpha^2}{2}t\right\}$$

Lemma

N folytonos trajektóriájú martingál $\mathcal{F}$ -ben, $1/N$ korlátos, τ egy valószínűséggel véges $\mathcal{F}$ -megállási idő.

$$M_t = \frac{N_{\tau+t}}{N_\tau} \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau+t}$$

Ekkor M lokális martingál $\mathcal{G}$ -ben.

Lemma

N folytonos trajektóriájú martingál $\mathcal{F}$ -ben, $1/N$ korlátos, τ egy valószínűséggel véges $\mathcal{F}$ -megállási idő, $M_t = N_{\tau+t}/N_\tau$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau+t}$. Ekkor M lokális martingál $\mathcal{G}$ -ben.

- $\rho_n = (n - \tau) \vee 0$. $\rho_n \sim \sigma(\tau) \subset \mathcal{F}_\tau = \mathcal{G}_0$, azaz ρ_n $\mathcal{G}$ -megállási idő, $\rho_n \rightarrow \infty$.
- $\rho = \rho_n$

$$M_t^\rho = M_{t \wedge \rho} \mathbb{1}_{(\rho > 0)} = \frac{N_{\tau + (t \wedge (n - \tau)_+)}}{N_\tau} \mathbb{1}_{(n > \tau)} = \frac{N_{n \wedge (\tau + t)}}{N_{n \wedge \tau}} \mathbb{1}_{(n > \tau)}$$

- $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}(M_t^\rho \mid \mathcal{G}_s) = \mathbb{E}\left(\frac{N_{n \wedge (\tau + t)}}{N_{n \wedge \tau}} \mathbb{1}_{(n > \tau)} \mid \mathcal{F}_{\tau + s}\right) = \frac{\mathbb{1}_{(n > \tau)}}{N_{n \wedge \tau}} \mathbb{E}(N_{n \wedge (\tau + t)} \mid \mathcal{F}_{\tau + s})$$

- Opcionális mintavétel

$$\mathbb{E}(N_{n \wedge (\tau + t)} \mid \mathcal{F}_{\tau + s}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(N_n \mid \mathcal{F}_{\tau + t}) \mid \mathcal{F}_{\tau + s}) = N_{n \wedge (\tau + s)}$$

•

$$\mathbb{E}(M_t^\rho \mid \mathcal{G}_s) = \frac{N_{n \wedge (\tau + s)}}{N_{n \wedge \tau}} \mathbb{1}_{(n > \tau)} = M_s^\rho$$

- M^{ρ_n} martingál $\mathcal{G}$ -ben minden n -re, azaz M lokális martingál $\mathcal{G}$ -ben.

Tétel

B Brown mozgás, τ egy valószínűséggel véges megállási idő $\mathcal{F}$ -ben. $X_t = B_{\tau+t} - B_\tau$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau+t}$.

Ekkor X Brown mozgás $\mathcal{G}$ -ben.

- Ha X Brown mozgás $\mathcal{G}$ -ben, akkor X független $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_\tau$ -től, azaz Brown mozgás megállási időpontban, a múltjától függetlenül újraindul.
- Tetszőleges $\delta > 0$ -ra, X előjelet vált $(0, \delta)$ -n. Azaz B a τ megállási idő után, $(\tau, \tau + \delta)$ -ban jár B_τ alatt és fölött is.
Black-Scholes modellben nincs értelme arról beszélni, hogy a részvényár egy adott szintet felfelé, vagy lefelé lép át.
- $\gamma = \max\{t \in [0, 1] : B_t = 0\}$ nem megállási idő, mert γ -nak létezik olyan jobb oldali környezete, pl. $(\gamma, 1)$, ahol B nem vált előjelet.

Állítás

B Brown mozgás, $\gamma = \max\{t \in [0, 1] : B_t = 0\}$.

$$H_t = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} B_{t\gamma}, \quad t \in [0, 1]$$

Ekkor H Brown híd, és H független γ -tól.

- B Brown mozgás. Időinverzió

$$X_t = \begin{cases} tB_{1/t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \quad \tau = \inf\{t \geq 1 : X_t = 0\} = \frac{1}{\gamma}$$

X Brown mozgás és τ megállási idő az X természetes filtrációjában.

- $Y_t = X_{\tau+t} - X_\tau = X_{\tau+t}$ Brown mozgás, független τ -tól és így $\gamma = 1/\tau$ -tól.
- Skála invariancia. $Z_t = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Y_{t\tau}$ szintén Brown mozgás, mert

$$\mathbb{P}(Z \in H) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(Z \in H \mid \tau)) = \mathbb{E}(\mathbb{P}((c^{-1/2} Y_{tc})_{t \geq 0} \in H) \mid_{c=\tau}) = \mathbb{P}(B \in H)$$

Állítás

$$H_t = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} B_{t\gamma}, \quad t \in [0, 1]$$

H γ -tól független Brown híd.

•

$$X_t = tB_{1/t}, \quad \tau = \frac{1}{\gamma}, \quad Y_t = X_{\tau+t}, \quad Z_t = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Y_{\tau t}$$

- X, Y, Z Brown mozgások.
- Ha Z Brown mozgás, akkor

$$\begin{aligned} \tilde{H}_t &= (1-t)Z_{\frac{t}{1-t}} = \frac{1-t}{\sqrt{\tau}} Y_{\frac{t\tau}{1-t}} = \frac{1-t}{\sqrt{\tau}} X_{\tau + \frac{t\tau}{1-t}} = \frac{1-t}{\sqrt{\tau}} X_{\frac{\tau}{1-t}} \\ &= \frac{1-t}{\sqrt{\tau}} \frac{\tau}{1-t} B_{\frac{1-t}{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} B_{\gamma(1-t)} = H_{1-t}, \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Brown híd. Ha $(H_{1-t})_{t \in [0,1]}$ Brown híd, akkor H is az.

Új téma: Mértékcseré, Girsanov (Гирсанов) tétel

- $\mathbb{P}, Q$ valószínűségi mértékek. $Q \ll \mathbb{P}$, azaz Q abszolút folytonos $\mathbb{P}$ -re nézve, ha minden $\mathbb{P}$ nullmértékű halmaz Q nullmértékű is.
- Példa. Ha $f \in L^1(\mathbb{P})$, $f \geq 0$, $\int f d\mathbb{P} = 1$ és $Q(H) = \int_H f d\mathbb{P}$, akkor $Q \ll \mathbb{P}$.
- A Radon-Nikodym tétel azt mondja, hogy minden példa ilyen.

Tétel

$\mathbb{P}, Q$ valószínűségi mértékek $(\Omega, \mathcal{A})$ -n, $Q \ll \mathbb{P}$. Ekkor létezik $Z \geq 0$, $\mathcal{A}$ mérhető változó, hogy $Q(A) = \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_A)$, minden $A \in \mathcal{A}$ -ra.

Z a Radon-Nikodym derivált, jelölése $\frac{dQ}{d\mathbb{P}}$.

- Jelölés. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}, \mathbb{E}_Q$ a $\mathbb{P}$ ill. Q szerinti integrál.
- A $Z = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}$ összefüggést $dQ = Z d\mathbb{P}$ alakban is írhatjuk (A két oldal integrálja tetszőleges A -n ugyanaz).

Állítás

$\mathbb{P}, Q$ valószínűségi mértékek $(\Omega, \mathcal{A})$ -n, $Q \ll \mathbb{P}$ és $Z = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}$. Ha $X \sim \mathcal{A}$, akkor

$$\mathbb{E}_Q(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(ZX)$$

A két oldal egyszerre definiált és ekkor megegyeznek.

Ellenőrzés indikátorra, lépcsős függvényre, nem negatív mérhetőre, mérhetőre.

Állítás

$\mathbb{P}, Q$ valószínűségi mértékek $(\Omega, \mathcal{A})$ -n, $Q \ll \mathbb{P}$ és $Z = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}$. Ha $X_n \xrightarrow{p} X$ $\mathbb{P}$ alatt, akkor $X_n \xrightarrow{p} X$ Q alatt.

$\varepsilon, \eta > 0$,

$$Q(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbb{E}_P(Z \mathbb{1}_{(|X_n - X| > \varepsilon)}) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z \mathbb{1}_{(Z \geq L)}) + L \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \eta, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy}$$

Példa, korábbi példa apró módosítása

- f_0 mindenhol pozitív sűrűségfüggvény $\mathbb{R}$ -en
- $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}, \mathbb{P}(H) = \int_H f_0$
- f_1 sűrűségfüggvény $\mathbb{R}$ -n, $Q(H) = \int_H f_1$
- $Q \ll \mathbb{P}$, hiszen $\mathbb{P}(H) = 0 \implies \text{Lebesgue}(H) = 0 \implies Q(H) = 0$.

•

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}} = \frac{f_1}{f_0}, \quad \text{mert} \quad Q(H) = \int_H f_1 = \int_H \frac{f_1}{f_0} f_0 = \int_H \frac{f_1}{f_0} d\mathbb{P}$$

- Ha

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-x^2/2T}, \quad f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-(x-\lambda T)^2/2T}, \quad \text{akkor} \quad \frac{dQ}{d\mathbb{P}}(x) = \exp\{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 T\}$$

- Ha $Z \sim N(0, T)$, $dQ = \exp\{\lambda Z - \frac{1}{2}\lambda^2 T\} d\mathbb{P}$, akkor $Z \sim_Q N(\lambda T, T)$.

$$Q(Z \in H) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{(Z \in H)} e^{\lambda Z - \frac{1}{2}\lambda^2 T}\right) = \int_H \frac{f_1}{f_0}(x) f_0(x) dx = \mathbb{P}(Z + \lambda T \in H)$$

- B Brown mozgás, $H_t = B_t - \frac{t}{T}B_T$, $t \in [0, T]$.
- H (skálázott) Brown híd, $B_T \sim N(0, T)$ és $B_T \perp H$
-

$$Q(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_A e^{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}\right)$$

- H és B_T együttes eloszlása Q alatt

$$Q(H \in C, B_T \in D) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(H \in C)} \mathbb{1}_{(B_T \in D)} e^{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}\right) = \mathbb{P}(H \in C) \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(B_T \in D)} e^{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}\right)$$

- $B_T \sim_Q N(\lambda T, T)$, H Brown híd Q alatt és $B_T \perp_Q H$.
-

$$B_t = H_t + (B_T - \lambda T) \frac{t}{T} + \lambda \frac{t}{T} = \tilde{B}_t + \lambda t, \quad t \in [0, T]$$

ahol $\tilde{B}$ Q -Brown mozgás.

- $\mathbb{P}, Q$ valószínűségi mértékek $(\Omega, \mathcal{A})$ -n. $\mathbb{P} \approx Q$, ha $\mathbb{P}$ és Q null halmazai megegyeznek.
- $\mathbb{P} \approx Q$ pontosan akkor, ha $\mathbb{P} \ll Q$ és $Q \ll \mathbb{P}$.

Állítás

$\mathbb{P} \approx Q, Z = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}$. Ekkor

$$\mathbb{P}(Z \leq 0) = Q(Z \leq 0) = 0 \quad \text{és} \quad \frac{d\mathbb{P}}{dQ} = \frac{1}{Z}$$

•

$$0 \leq Q(Z \leq 0) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(Z \mathbb{1}_{(Z \leq 0)}\right) \leq 0$$

$\mathbb{P} \approx Q$ miatt $\{Z \leq 0\}$ $\mathbb{P}$ alatt is nullmértékű.

- $1/Z$ definiált a $\{Z \neq 0\}$ eseményen, ami teljes mértékű $\mathbb{P}$ és Q szerint is.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \{Z \neq 0\}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{(Z \neq 0)} Z \frac{1}{Z}\right) = \mathbb{E}_Q\left(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{(Z \neq 0)} \frac{1}{Z}\right)$$

Azaz $\mathbb{1}_{(Z \neq 0)} \frac{1}{Z}$ teljesíti a Radon-Nikodym derivált definícióját.

- $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ (filtrált) valószínűségi mező. Q **lokálisan ekvivalens** $\mathbb{P}$ -val, ha minden t -re $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t} \approx Q|_{\mathcal{F}_t}$. Jelölés $\mathbb{P} \approx_{loc} Q$.
- Megjegyzés. $\mathbb{P} \approx_{loc} Q$ -ból nem következik, hogy $\mathbb{P} \approx Q$. Például B és $(B_t + t)_{t \geq 0}$ eloszlása $(C[0, \infty)$ -n lokálisan ekvivalens, de szinguláris.
- Ha $\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, akkor legyen $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$. $(Z_t)_{t \geq 0}$ neve **sűrűségi folyamat**.

Állítás

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, Z a sűrűségi folyamat, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$.

Ekkor $\mathbb{P}(Z_t > 0) = 1$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t) = 1$, $Z_t \sim \mathcal{F}_t$ minden t -re és $0 \leq s \leq t$ esetén $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t | \mathcal{F}_s) = Z_s$.

Azaz Z martingál $\mathbb{P}$ alatt.

- $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}} \implies Z_t \sim \mathcal{F}_t$ és $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t) = Q(\Omega) = 1$.
- $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t} \approx Q|_{\mathcal{F}_t} \implies \mathbb{P}(Z_t \leq 0) = 0$.
- $A \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \implies Q(A) = Q|_{\mathcal{F}_t}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t \mathbf{1}_A)$ és $Q(A) = Q|_{\mathcal{F}_s}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_s \mathbf{1}_A) \implies \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t | \mathcal{F}_s) = Z_s$, mivel $Z_s \sim \mathcal{F}_s$.

- $\mathbb{P} \approx_{loc} Q$.
- Ha M folytonos trajektóriájú $\mathbb{P}$ alatt, azaz

$$\mathbb{P}(M \text{ trajektóriája folytonos}) = \mathbb{P}(\cap_n \{M \text{ trajektóriája folytonos } [0, n]\text{-en}\}) = 1$$

- $Q(\{M \text{ trajektóriája folytonos } [0, n]\text{-en}\}) = 1$ és az M folyamat Q alatt is folytonos trajektóriájú.

Állítás

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat. Ha Z folytonos trajektóriájú, akkor Z nem éri el a nulla szintet.
 $\mathbb{P}(\forall t, Z_t > 0) = 1$.

Megjegyzés. Z folytonossága nélkül is igaz. Ha a filtráció jobbról folytonos, akkor Z -nek létezik càdlàg változata, és erre a változatra az állítás igaz marad.

- Legyen $\tau = \inf\{t \geq 0 : Z_t = 0\}$. τ megállási idő.
- $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \cap \mathcal{F}_\tau$, azaz az opcionális mintavétel tételét is használva

$$Q(\tau \leq t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t \mathbb{1}_{(\tau \leq t)}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{(\tau \leq t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t | \mathcal{F}_\tau)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{(\tau \leq t)} Z_{t \wedge \tau}) = 0$$

- $Q(\tau \leq t) = 0$, Q és $\mathbb{P}$ ekvivalens $\mathcal{F}_t$ -n, azaz $\mathbb{P}(\tau \leq t) = 0$
- $t = n$ -nel, $\mathbb{P}(\tau \leq n) = 0$ minden n -re.

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = \mathbb{P}(\cup_n (\tau \leq n)) \leq \sum_n \mathbb{P}(\tau \leq n) = 0$$

Állítás

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat. Ha Z Itô folyamat, akkor

$$Z_t = \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}[M]_t\right\}, \quad \text{ahol} \quad M_t = \log(Z_t) + \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s$$

Az állítás igaz folytonos Z -re is. De mi csak Itô folyamatokra bizonyítottuk az Itô formulát.

- Itô formula a logaritmus függvényre.

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \log x, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

•

$$\log(Z_t) = \log(Z_0) + \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{Z_s^2} d[Z]_s = M_t - \frac{1}{2}[M]_t$$

- Megjegyzés. Az Itô formulát $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre számoltuk ki. Ha $D \subset \mathbb{R}^d$ nyílt, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 , X Itô, $\mathbb{P}(X_t \in D) = 1$ minden t -re, akkor az Itô formula érvényben marad.

Állítás

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat.

- M pontosan akkor martingál Q alatt, ha ZM martingál $\mathbb{P}$ alatt.

Tegyük fel, hogy M martingál Q alatt. Ekkor

- $M_t \sim \mathcal{F}_t$, vagyis $(MZ)_t \sim \mathcal{F}_t$
- $|M_t| \in L^1(Q)$, azaz $\mathbb{E}_Q(|M_t|) = \mathbb{E}_P(|(ZM)_t|) < \infty$.
- Ha $0 \leq s \leq t$, $A \in \mathcal{F}_s$, akkor $M_t \mathbb{1}_A \sim \mathcal{F}_t$ és $M_s \mathbb{1}_A \sim \mathcal{F}_s$ miatt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t M_t \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_Q(M_t \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_Q(M_s \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_s M_s \mathbb{1}_A)$$

Azaz ha M Q -martingál, akkor ZM $\mathbb{P}$ -martingál.

Állítás

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat.

- M pontosan akkor martingál Q alatt, ha ZM martingál $\mathbb{P}$ alatt.

- Beláttuk, hogy ha M martingál Q alatt, akkor

$$\left(M_t \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}} \right)_{t \geq 0} \quad \mathbb{P}\text{-martingál}$$

- Szerepcserével, ha N martingál $\mathbb{P}$ alatt, akkor

$$\left(N_t \frac{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}{dQ|_{\mathcal{F}_t}} \right)_{t \geq 0} = \left(N_t \frac{1}{Z_t} \right)_{t \geq 0} \quad Q\text{-martingál}$$

- Ha $N = MZ$ martingál $\mathbb{P}$ alatt, akkor $N/Z = MZ/Z = M$ martingál Q alatt.

Állítás

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat.

- Z, M folytonos trajektóriájú. M pontosan akkor lokális martingál Q alatt, ha ZM lokális martingál $\mathbb{P}$ alatt.
- M folytonos trajektóriájú Q -lokális martingál. Ha $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$ akkor $\tau_n \leq \tau_{n+1} \rightarrow \infty$ megállási idő sorozat, M^{τ_n} Q -martingál minden n -re.
- Cél. $(MZ)^{\tau_n}$ $\mathbb{P}$ -martingál.
- M^{τ_n} Q martingál, ezért $M^{\tau_n} Z$ $\mathbb{P}$ -martingál.
- Martingál megállítása martingált ad, vagyis $(M^{\tau_n} Z)^{\tau_n} = (MZ)^{\tau_n}$ $\mathbb{P}$ -martingál.

Tétel

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{Q|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$. Tegyük fel, hogy Z Itô folyamat. Láttuk, hogy ekkor $Z_t = \exp\left\{M_t - \frac{1}{2}[M]_t\right\}$, ahol $M_t = \log Z_t + \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s$. Ekkor

$$B \text{ Brown mozgás } \mathbb{P} \text{ alatt} \iff \tilde{B} = B - [B, M] \text{ Brown mozgás } Q \text{ alatt}$$

- Tegyük fel B $\mathbb{P}$ -Brown mozgás. A parciális integrálás formulájából

$$\begin{aligned} (\tilde{B}Z)_t &= \int_0^t \tilde{B}_s dZ_s + \int_0^t Z_s d(B - [B, M])_s + [B, Z]_t \\ &= \int_0^t \tilde{B}_s dZ_s + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t Z_s \frac{1}{Z_s} d[B, Z] + [B, Z]_t = \int_0^t \tilde{B}_s dZ_s + \int_0^t Z_s dB_s \end{aligned}$$

- $\tilde{B}Z$ lokális martingál $\mathbb{P}$ alatt, azaz $\tilde{B}$ lokális martingál Q alatt.
- $\tilde{B}_0 = 0$, $\tilde{B}$ folytonos trajektóriájú, és $[\tilde{B}]_t = [B]_t = t$. ($\mathbb{P}$ és Q alatt $\mathcal{F}_t$ mérhető változók egyszerre konvergensek sztochasztikusan).
- Lévy karakterizáció szerint $\tilde{B}$ Brown mozgás Q alatt.

Tétel

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{Q|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$. Tegyük fel, hogy Z Itô folyamat. Ekkor

$$B \text{ Brown mozgás } \mathbb{P} \text{ alatt} \iff \tilde{B} = B - [B, M] \text{ Brown mozgás } Q \text{ alatt}$$

- Beláttuk, hogy ha $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ és B $\mathbb{P}$ -Brown mozgás, akkor

$$\tilde{B}_t = B_t - [B, M]_t = B_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[B, Z]_s \quad \text{Brown mozgás } Q \text{ alatt.}$$

- $\mathbb{P}, Q$ szerepcseréjével, ha $\tilde{B}$ Q -Brown mozgás, akkor

$$\tilde{\tilde{B}}_t = \tilde{B}_t - \int_0^t Z_s d[B, 1/Z]_s \quad \text{Brown mozgás } \mathbb{P} \text{ alatt.}$$

- Itô formula $1/Z$ -re. $f(x) = 1/x$, $f'(x) = -1/x^2$, $f''(x) = 2/x^3$

$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{Z_0} - \int_0^t \frac{1}{Z_s^2} dZ_s + \int_0^t \frac{1}{Z_s^3} d[Z]_s$$

Tétel

$\mathbb{P} \approx_{loc} Q$, $Z_t = \frac{Q|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$. Tegyük fel, hogy Z Itô folyamat. Ekkor

$$B \text{ Brown mozgás } \mathbb{P} \text{ alatt} \iff \tilde{B} = B - [B, M] \text{ Brown mozgás } Q \text{ alatt}$$

- $\mathbb{P}, Q$ szerepcseréjével, ha $\tilde{B}$ Q -Brown mozgás, akkor

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[B, Z]_s - \int_0^t Z_s d[B, 1/Z]_s \quad \text{Brown mozgás } \mathbb{P} \text{ alatt.}$$

- Itô formula $1/Z$ -re. $f(x) = 1/x$, $f'(x) = -1/x^2$, $f''(x) = 2/x^3$

$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{Z_0} - \int_0^t \frac{1}{Z_s^2} dZ_s + \int_0^t \frac{1}{Z_s^3} d[Z]_s$$

•

$$[B, 1/Z]_t = - \int_0^t \frac{1}{Z_s^2} d[B, Z]_s, \quad - \int_0^t Z_s d[B, 1/Z]_s = \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[B, Z]_s, \quad \tilde{B}_t = B_t$$

Tétel

$\mathbb{P} \approx Q$, $Z_t = \frac{dQ|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$ a sűrűségi folyamat. N folytonos trajektóriájú folyamat.

$$N \text{ lokális martingál } \mathbb{P}\text{-alatt} \iff \tilde{N}_t = N_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[N, Z]_s \text{ lokális martingál } Q\text{-alatt}$$

$$\text{és } [N] = [\tilde{N}].$$

Bizonyítás csak arra az esetre, ha $N, \tilde{N}, Z$ Itô folyamat. Ha Z nem folytonos trajektóriájú, akkor $\mathcal{F}$ jobbról folytonossága is kell és ebben az esetben Z választható càdlàg-nak.

•

$$Z = e^{M - \frac{1}{2} \langle M \rangle}, \quad \text{ahol} \quad M_t = \log Z_t + \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s \quad \text{és} \quad N_t = N_0 + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

•

$$\tilde{N}_t = N_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[N, Z]_s = N_0 + \int_0^t \sigma_s dB_s - \int_0^t \sigma_s \frac{1}{Z_s} d[B, Z]_s = N_0 + \int_0^t \sigma_s d\tilde{B}_s$$

• $[N]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds = [\tilde{N}]_t.$

- B Brown mozgás, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $dQ_T = \exp\{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\} d\mathbb{P}$ minden $T \geq 0$ -ra valószínűségi mérték. Q_T sűrűségi folyamata

$$Z_t = \mathbb{E}(\exp\{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\} \mid \mathcal{F}_t) = \exp\{\lambda B_{T \wedge t} - \frac{1}{2}\lambda^2 T \wedge t\}$$

•

$$Z = e^{M - \frac{1}{2}[M]}, \quad M_t = \int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq T)} \lambda dB_s \quad \tilde{B}_t = B_t - [B, M]_t = B_t - \int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq T)} \lambda ds = B_t - \lambda T \wedge t$$

- Q_T alatt B driftes BM

$$B_t = \tilde{B}_t + \lambda T \wedge t = \tilde{B}_t + \int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq T)} \lambda ds$$

ahol $\tilde{B}$ Brown mozgás Q_T alatt.

- $X_t = B_t + \lambda t$, $S_t(X) = \max_{u \leq t} X_u$. Cél $S_t(X)$ eloszlása.
- $y > 0$

$$\mathbb{P}(S(X)_T \geq y) = Q(S_T(B) \geq y), \quad \text{ahol} \quad \frac{dQ}{d\mathbb{P}} = e^{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}$$

- $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t = y\}$, $\tilde{B}_t = 2B_{t \wedge \tau} - B_t$. $\tilde{B}$ a tükrözött Brown mozgás.

$$\begin{aligned} Q(S_T(B) \geq y) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(S_T \geq y)} e^{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(B_T \geq y)} e^{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(\tilde{B}_T > y)} e^{\lambda(2y - \tilde{B}_T) - \frac{1}{2}\lambda^2 T}\right) \\ &= Q(B_T \geq y) + e^{2\lambda y} Q(B_T < -y) \\ &= \mathbb{P}(B_T + \lambda T \geq y) + e^{2\lambda y} \mathbb{P}(B_T + \lambda T \leq -y) \\ &= \mathbb{P}(X_T \geq y) + e^{2\lambda y} \mathbb{P}(X_T \leq -y) \end{aligned}$$

- Részletek:

$$\{S_T \geq y\} = \{B_T \geq y\} \cup \{\tilde{B}_T > y\}, \quad \mathbb{1}_{(\tau \leq T)} B_T = \mathbb{1}_{(\tau \leq T)} (2B_{T \wedge \tau} - \tilde{B}_T) = \mathbb{1}_{(\tau \leq T)} (2y - \tilde{B}_T)$$