

# Sztochasztikus folyamatok előadás

---

2025.04.02.

**Kitérő:**  $\sum_i B_{t_i^*} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$

### Állítás

$B$  Brown mozgás,  $(t_i)$  a  $[0, t]$  intervallum felosztása és  $t_i^* = \alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i+1}$ , ahol  $\alpha \in [0, 1]$ .

Ekkor  $2 \sum_i B_{t_i^*} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$  és  $B_t^2 - (2\alpha - 1)t$  eltérésének  $L^2$  norma négyzete legfeljebb a felosztás finomságának  $3t$  szerese.

- $2B_{t_i^*} = (B_{t_i} + B_{t_{i+1}}) + (B_{t_i^*} - B_{t_i}) - (B_{t_{i+1}} - B_{t_i^*})$
- Összegzés után:

$$S = 2 \sum_i B_{t_i^*} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = B_t^2 + Q_1 - Q_2,$$

ahol

$$Q_1 = \sum_i (B_{t_i^*} - B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}), \quad Q_2 = \sum_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i^*})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

- $\mathbb{E}(Q_1) = \sum_i (1 - \alpha)(t_{i+1} - t_i) = 1 - \alpha t$  és  $\mathbb{E}(Q_2) = \sum_i \alpha(t_{i+1} - t_i) = \alpha t$ , azaz

$$S - (B_t^2 - (1 - 2\alpha)t) = Q_1 - Q_2 - \mathbb{E}(Q_1 - Q_2),$$

$$\mathbb{E}((S - (B_t^2 + (1 - 2\alpha)t))^2) = \mathbb{D}^2(Q_1 - Q_2) \leq (\mathbb{D}(Q_1) + \mathbb{D}(Q_2))^2$$

**Kitérő:**  $\sum_i B_{t_i^*}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$

### Állítás

$B$  Brown mozgás,  $(t_i)$  a  $[0, t]$  intervallum felosztása és  $t_i^* = \alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i+1}$ , ahol  $\alpha \in [0, 1]$ .

Ekkor  $2 \sum_i B_{t_i^*}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$  és  $B_t^2 + (2\alpha - 1)t$  eltéréseinek  $L^2$  norma négyzete legfeljebb a felosztás finomságának  $3t$  szerese.

- $\mathbb{E}((S - (B_t^2 - (1 - 2\alpha)t))^2) = \mathbb{D}^2(Q_1 - Q_2) \leq (\mathbb{D}(Q_1) + \mathbb{D}(Q_2))^2$
- Független növekményűség miatt

$$\mathbb{D}^2(Q_1) = \sum_i \mathbb{D}^2((B_{t_i^*} - B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))$$

- A négyesszorzat formula alapján (Wick formula spec esete), ha  $(X, Y) \sim N(0, \Sigma)$ , akkor  $\mathbb{D}^2(XY) = \mathbb{E}(X^2Y^2) - \text{cov}^2(X, Y) = \text{cov}^2(X, Y) + \mathbb{D}^2(X)\mathbb{D}^2(Y)$ .

•

$$\mathbb{D}^2(Q_1) = \sum_i (1 - \alpha + (1 - \alpha)^2)(t_{i+1} - t_i)^2 \leq (1 - \alpha + (1 - \alpha)^2)t \max t_{i+1} - t_i,$$

hasonlóan:  $\mathbb{D}^2(Q_2) \leq (\alpha + \alpha^2)t \max t_{i+1} - t_i$ .

- $(\sqrt{\alpha + \alpha^2} + \sqrt{(1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2})^2 \leq 3$  ha  $\alpha \in [0, 1]$ .

### Definíció

$\mathcal{F}$  filtráció,  $\tau$  megállási idő  $\mathcal{F}$ -ben. Jelölés:  $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

### Tétel (Opcionális mintavétel)

$X$  folytonos trajektóriájú martingál,  $\tau$  megállási idő. Ekkor  $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_\tau) = X_{t \wedge \tau}$

- Kiszámoltuk véges értékészletű  $\tau$ -ra.
- Láttuk, hogy tetszőleges  $\tau$ -hoz létezik  $\tau_n$  véges értékészletű megállási idő, amire  $\tau_n \searrow \tau$ .
- Ebből megkaptuk, hogy  $X_\tau \sim \mathcal{F}_\tau$  és ha  $X_{\tau_n} \rightarrow X_\tau$   $L^1$ -ben akkor az állítás igaz  $\tau$ -ra is.
- $X_{\tau_n} \rightarrow X_\tau$  egy valószínűséggel a trajektóriák folytonossága miatt, így elegendő  $\{X_{\tau_n} : n \geq 1\}$  egyenletes integrálhatósága:  
minden  $\varepsilon > 0$ -ra létezik  $K$  úgy, hogy  $\mathbb{E}(|X_{\tau_n}| \mathbb{1}_{(|X_{\tau_n}| > K)}) \leq \varepsilon$  minden  $n$ -re.

$\{\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-alg.}\}$  egyenletesen integrálható, ha  $Y \in L^1$

- Ha  $Z = |\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})|$ , akkor

$$A = \{Z > K\} \in \mathcal{G} \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(A) \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{K} \leq \frac{\mathbb{E}(|Y|)}{K}$$

•

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{(Z>K)}) &= \mathbb{E}(|\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})|\mathbb{1}_A) \\ &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|Y|\mathcal{G})\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(|Y|\mathbb{1}_A) \\ &= \mathbb{E}(|Y|\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{(|Y|\leq L)}) + \mathbb{E}(|Y|\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{(|Y|>L)}) \\ &\leq L\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(|Y|\mathbb{1}_{(|Y|>L)}) \leq \frac{L}{K}\mathbb{E}(|Y|) + \mathbb{E}(|Y|\mathbb{1}_{(|Y|>L)})\end{aligned}$$

- Legyen  $L$  olyan nagy, hogy  $\mathbb{E}(|Y|\mathbb{1}_{(|Y|>L)}) < \varepsilon/2$  és ezután  $K$  olyan nagy, hogy  $L\mathbb{E}(|Y|)/K < \varepsilon/2$ . Ezzel a választással

$$\sup\{\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{(Z>K)}) : Z = |\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})| \text{ } \mathcal{G} \text{ } \sigma\text{-alg.}\} \leq \varepsilon$$

## Definíció (Megállított $\sigma$ -algebra)

$\mathcal{F}$  filtráció,  $\tau$  megállási idő  $\mathcal{F}$ -ben. Jelölés:  $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$   $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$ .

## Tétel

$X$  folytonos trajektóriájú martingál,  $\tau$  megállási idő az  $\mathcal{F}$  filtrációban. Ekkor  $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_\tau) = X_{t \wedge \tau}$

## Következmény

- Folytonos trajektóriájú martingál megállítással martingált kapunk.
  - Folytonos trajektóriájú lokális martingál megállítással lokális martingált kapunk.
  - Folytonos trajektóriájú lokális martingálok összege lokális martingál.
  - Folytonos trajektóriájú lokális martingál megállítással korlátos martingállá tehető.
- 
- Hasonló gondolatmenettel az is megkapható, hogy ha  $X$  folytonos trajektóriájú szubmartingál, akkor  $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_\tau) \geq X_{t \wedge \tau}$ .
  - Ha  $X$  càdlàg martingál, akkor a tétel igaz marad.

Az  $\mathcal{F}$  filtráció rögzített. Minden fogalom (megállási idő, martingál, lokális martingál) erre vonatkozik.

### **Lemma (Alap lemma, bizonyítás később)**

*$X$  nullából induló, folytonos trajektóriájú, lokális martingál. Ha  $X$  korlátos változású, akkor  $X \equiv 0$ .*

### **Következmény (Szemimartingál felbontás unicitása)**

*$X = V^{(1)} + M^{(1)} = V^{(2)} + M^{(2)}$ , ahol  $V^{(1)}, V^{(2)}$  korlátos változású folyamatok és  $M^{(1)}, M^{(2)}$  folytonos trajektóriájú, nullából induló, lokális martingál. Ekkor  $V^{(1)} = V^{(2)}$  és  $M^{(1)} = M^{(2)}$ .*

$V^{(1)} - V^{(2)} = M^{(2)} - M^{(1)}$  nullából induló folytonos trajektóriájú, lokális martingál, ami korlátos változású, így azonosan nulla

## Alap lemma és következményei

Az  $\mathcal{F}$  filtráció rögzített. Minden fogalom (megállási idő, martingál, lokális martingál) erre vonatkozik.

### Lemma (Alap lemma, bizonyítás később)

*$X$  nullából induló, folytonos trajektóriájú, lokális martingál. Ha  $X$  korlátos változású, akkor  $X \equiv 0$ .*

### Következmény (Szemimartingál felbontás unicitása)

*$X = V^{(1)} + M^{(1)} = V^{(2)} + M^{(2)}$ , ahol  $V^{(1)}, V^{(2)}$  korlátos változású folyamatok és  $M^{(1)}, M^{(2)}$  folytonos trajektóriájú, nullából induló, lokális martingál. Ekkor  $V^{(1)} = V^{(2)}$  és  $M^{(1)} = M^{(2)}$ .*

### Következmény (Felbontás unicitása Itô folyamatokra)

*$X$  Itô folyamat az  $\mathcal{F}$  filtrációban,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s^{(1)} ds + \int_0^t \sigma_s^{(1)} dB_s^{(1)} \quad \text{és} \quad X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s^{(2)} ds + \int_0^t \sigma_s^{(2)} dB_s^{(2)}.$$

*Ekkor  $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$  és  $(\sigma^{(1)})^2 = (\sigma^{(2)})^2 dt \times d\mathbb{P}$  majdnem mindenütt és  $\int_0^t \sigma_s^{(1)} dB_s^{(1)} = \int_0^t \sigma_s^{(2)} dB_s^{(2)}$*

Azaz  $\mathcal{L}(X)$  definíciójában  $X$  felbontása nem játszik szerepet.

Az  $\mathcal{F}$  filtráció rögzített. Minden fogalom (megállási idő, martingál, lokális martingál) erre vonatkozik.

### Lemma (Alap lemma, bizonyítás később)

*$X$  nullából induló, folytonos trajektóriájú, lokális martingál. Ha  $X$  korlátos változású, akkor  $X \equiv 0$ .*

### Következmény

$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$  Itô folyamat és **lokális martingál**. Ekkor az időintegrál azonosan nulla, azaz  $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dB_s$ .

- $M_t = X_t - X_0 - \int_0^t \sigma_s B_s = \int_0^t \mu_s ds$ ,
- $M$  folytonos trajektóriájú, nullából induló lokális martingál.
- $M \equiv 0$  és  $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dB_s$ .

Ha  $X$  folytonos trajektóriájú lokális martingál (és Itô folyamat), akkor az  $X$  szerinti integrállal kapott folyamat is lokális martingál.

## Alap lemma és következményei

Az  $\mathcal{F}$  filtráció rögzített. Minden fogalom (megállási idő, martingál, lokális martingál) erre vonatkozik.

### Lemma (Alap lemma, bizonyítás később)

*$X$  nullából induló, folytonos trajektóriájú, lokális martingál. Ha  $X$  korlátos változású, akkor  $X \equiv 0$ .*

### Következmény

*$X$  Itô folyamat és lokális martingál. Ekkor  $[X]$  az az egyetlen nullából induló, adaptált, monoton növekvő folyamat, amivel  $(X_t^2 - [X]_t)_{t \geq 0}$  folytonos trajektóriájú lokális martingál.*

- $X_t^2 - [X]_t = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s \sigma_s dB_s$ , így  $X^2 - [X]$  folytonos trajektóriájú lokális martingál.
- Tegyük fel, hogy  $X^2 - V$  folytonos trajektóriájú lokális martingál, ekkor

$$M = (X^2 - [X]) - (X^2 - V) = V - [X]$$

is folytonos trajektóriájú lokális martingál.

- Ha  $V$  monoton nő és nullából indul, akkor  $M_0 = 0$  és  $M$  korlátos változású, azaz  $M \equiv 0$  és  $V = [X]$ .

## Alap lemma bizonyítása korlátos martingálra

Az  $\mathcal{F}$  filtráció rögzített. Minden fogalom (megállási idő, martingál, lokális martingál) erre vonatkozik.

### Lemma

*$X$  nullából induló, folytonos trajektóriájú, korlátos martingál. Ha  $X$  korlátos változású, akkor  $X \equiv 0$ .*

- $t$  rögzített  $(t_i^{(n)})$  a  $[0, t]$  végtelenül finomodó felosztássorozata.

•

$$Q_n = \sum_i (X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}})^2 = \sum_i \Delta_i^2, \quad Q_n \xrightarrow{p} [X]_t = 0$$

- $M$  négyzetesen integrálható martingál, növekmények merőlegesek, azaz

$$\mathbb{E}(Q_n) = \mathbb{E}\left(\sum_i \Delta_i^2\right) = \mathbb{E}\left((\sum_i \Delta_i)^2\right) - 2 \sum_{i < j} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\Delta_i \Delta_j \mid \mathcal{F}_{t_j})\right) = \mathbb{E}(X_t^2)$$

- Ha  $\mathbb{E}(Q_n) \rightarrow 0$ , akkor  $\mathbb{E}(X_t^2) = 0$  és  $X_t = 0$ .
- $\lim \mathbb{E}(Q_n) = 0$ -hoz elég, hogy  $\sup_n \mathbb{E}(Q_n^2) < \infty$ , mert

$$\mathbb{E}(Q_n) \leq \varepsilon + K\mathbb{P}(\varepsilon \leq Q_n \leq K) + \frac{1}{K} \sup_n \mathbb{E}(Q_n^2) \leq 3\varepsilon, \quad \text{ha } K \text{ és } n \text{ elég nagy.}$$

$$\sup_n \mathbb{E}(Q_n^2) < \infty \text{!}$$

- $X$  korlátos  $|X| \leq K$ , azaz  $\Delta_i^2 \leq (2K)^2$

•

$$Q_n^2 = \left( \sum_i \Delta_i^2 \right)^2 = \sum_i \Delta_i^4 + 2 \sum_{i < j} \Delta_i^2 \Delta_j^2$$

•

$$\sum_i \Delta_i^4 \leq \max_i \Delta_i^2 \sum_i \Delta_i^2 \leq (2K)^2 \sum_i \Delta_i^2 = (2K)^2 Q_n,$$

•

$$\mathbb{E}\left(\sum_i \Delta_i^4\right) \leq (2K)^2 \mathbb{E}(Q_n) = (2K)^2 \mathbb{E}(X_t^2) \leq 4K^4$$

$$\sup_n \mathbb{E}(Q_n^2) < \infty \text{ II.}$$

- $X$  korlátos  $|X| \leq K$ , azaz  $\Delta_i^2 \leq (2K)^2$

•

$$Q_n^2 = \left( \sum \Delta_i^2 \right)^2 = \sum_i \Delta_i^4 + 2 \sum_{i < j} \Delta_i^2 \Delta_j^2$$

•

$$\mathbb{E}\left(\sum_i \Delta_i^4\right) \leq 4K^4.$$

- Ha  $i < j < k$ , akkor

$$\mathbb{E}\left(\Delta_i^2 \Delta_j \Delta_k \mid \mathcal{F}_{t_k}\right) = \Delta_i^2 \Delta_j \mathbb{E}\left(\Delta_k \mid \mathcal{F}_{t_k}\right) = 0,$$

•

$$\mathbb{E}\left(\Delta_i^2 \sum_{j>i} \Delta_j^2\right) = \mathbb{E}\left(\Delta_i^2 \left(\sum_{j>i} \Delta_j^2 + 2 \sum_{i < j < k} \Delta_j \Delta_k\right)\right) = \mathbb{E}\left(\Delta_i^2 \left(\sum_{j>i} \Delta_j\right)^2\right) \leq (2K)^2 \mathbb{E}(\Delta_i^2)$$

•

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i < j} \Delta_i^2 \Delta_j^2\right) = \sum_i \mathbb{E}\left(\Delta_i^2 \sum_{j>i} \Delta_j^2\right) \leq (2K)^2 \sum_i \mathbb{E}(\Delta_i^2) = (2K)^2 \mathbb{E}(Q_n) \leq 4K^4$$

- Összerakva

$$\mathbb{E}(Q_n^2) \leq 3 \cdot 4K^4$$

### Lemma

$X$  nullából induló, folytonos trajektóriájú, **lokális** martingál. Ha  $X$  korlátos változású, akkor  $X \equiv 0$ .

- Legyen  $\tau = \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq 1\}$ .
- $M = X_{t \wedge \tau}$  korlátos martingál.
- $M$  korlátos változású  $0 \leq V^M \leq V^X = 0$
- $M \equiv 0$ .
- $M_t = X_{t \wedge \tau} = 0$ , és

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t \mathbb{1}_{(\tau < \infty)} = \lim_{t \rightarrow \infty} X_{t \wedge \tau} \mathbb{1}_{(\tau < \infty)} = \mathbb{1}_{(\tau < \infty)}$$

- $\tau = \infty$  és  $X \equiv 0$ .

## Tétel

$X$  nullából induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál  $\mathcal{F}$ -ben.

$X$  pontosan akkor Brown mozgás  $\mathcal{F}$ -ben, ha  $[X]_t = t$  minden  $t$ -re.

Megjegyzés. Csak arra az esetre látjuk be, ha  $X = \sum_j X^{(j)}$ , ahol  $X^{(j)}$  Itô folyamat  $\mathcal{F}$ -ben  $i = 1, \dots, d$ .

- Brown mozgás kvadratikus variációja az idő. Csak a másik irány érdekes.

•

$$f : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{C} \quad f(t, x) = f(t, x_1, \dots, x_d) = \exp\left\{i\alpha \sum_j x_j + \frac{1}{2}\alpha^2 t\right\}$$

•

$$\partial_t f = \frac{1}{2}\alpha^2 f, \quad \partial_{x_j} f = i\alpha f, \quad \partial_{x_j, x_k} f = -\alpha^2 f$$

- $M_t = f(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)})$  fejlődése

$$M_t = M_0 + \int_0^t \frac{1}{2}\alpha^2 M_s ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t i\alpha M_s dX_s^{(j)} + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \int_0^t -\alpha^2 M_s d[X^{(j)}, X^{(k)}]_s = M_0 + \sum_{j=1}^d \int_0^t i\alpha M_s dX_s^{(j)}$$

### Tétel

$X$  nullából induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál  $\mathcal{F}$ -ben.

$X$  pontosan akkor Brown mozgás  $\mathcal{F}$ -ben, ha  $[X]_t = t$  minden  $t$ -re.

Megjegyzés. Csak arra az esetre látjuk be, ha  $X = \sum_j X^{(j)}$ , ahol  $X^{(j)}$  Itô folyamat  $\mathcal{F}$ -ben  $i = 1, \dots, d$ .

- $M_t = \exp\left\{i\alpha X_t + \frac{\alpha^2}{2}t\right\}$ ,  $X = \sum_j X^{(j)}$ .
- Ha  $[X]_t = t$ , akkor

$$M_t = 1 + \sum_{j=1}^d \int_0^t i\alpha M_s dX_s^{(j)}$$

- Ha  $X$  lokális martingál, akkor az alap lemma miatt

$$X_t = \int_0^t \sum_j \mu_s^{(j)} ds + \sum_j \int_0^t \sigma_s^{(j)} dB_s^{(j)} = \sum_j \int_0^t \sigma_s^{(j)} dB_s^{(j)} \quad \Rightarrow \quad M \text{ lokális martingál.}$$

### Tétel

$X$  nullából induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál  $\mathcal{F}$ -ben.

$X$  pontosan akkor Brown mozgás  $\mathcal{F}$ -ben, ha  $[X]_t = t$  minden  $t$ -re.

Emlékeztető.

### Tétel (Martingál karakterizáció)

$X$  nullából induló, folytonos trajektóriájú,  $\mathcal{F}$ -adaptált folyamat.

$X$  pontosan akkor BM  $\mathcal{F}$ -ben, ha  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  esetén  $(\exp\{i\alpha X_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t\})_{t \geq 0}$  **lokális martingál**.

- $M_t = \exp\{i\alpha X_t + \frac{\alpha^2}{2}t\}$ ,  $M$  lokális martingál.
- $(M_{t \wedge T})_{t \geq 0}$  korlátos, mert  $|M_{t \wedge T}| \leq \exp\{\frac{1}{2}\alpha^2 T\}$
- $(M_{t \wedge T})_{t \geq 0}$  korlátos lokális martingál, vagyis martingál.
- $s \leq t \leq T$ -re

$$\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_{t \wedge T} \mid \mathcal{F}_s) = M_{s \wedge T} = M_s$$

- $M$  martingál, tetszőleges  $\alpha$  esetén, azaz  $X$  Brown mozgás.

**Tétel**

$B$  Brown mozgás,  $\tau$  megállási idő  $\mathcal{F}$ -ben.  $X_t = B_{t \wedge \tau} - (B_t - B_{t \wedge \tau}) = 2B_{t \wedge \tau} - B_t$ .

$X$  Brown mozgás  $\mathcal{F}$ -ben.

•

$$B_{t \wedge \tau} = \int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq \tau)} dB_s$$

•

$$X_t = \int_0^t 2\mathbb{1}_{(s \leq \tau)} - 1 dB_s$$

•

$$[X]_t = \int_0^t (2\mathbb{1}_{(s \leq \tau)} - 1)^2 ds = t$$

- Azaz  $X$  nullából, induló folytonos trajektóriájú lokális martingál,  $[X]_t = t$ .
- Lévy karakterizáció alapján  $X$  Brown mozgás.

### Állítás

$B$  Brown mozgás,  $S_t = \max_{u \leq t} B_u$ . Ekkor  $S_t \stackrel{d}{=} |B_t|$ .

- Legyen  $y > 0$  és  $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t = y\}$ ,  $X_t = 2B_{t \wedge \tau} - B_t$ .
- $\tau$  megállási idő,  $X$  Brown mozgás a tükrözési elv alapján.
- $t > 0$

$$\{S_t \geq y\} = \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t, B_t \geq y\} \cup \{\tau \leq t, B_t \leq y\}$$

•

$$\{\tau \leq t, B_t \geq y\} = \{B_t \geq y\}$$

•

$$\{\tau \leq t, B_t \leq y\} = \{\tau \leq t, 2y - B_t \geq y\} = \{\tau \leq t, X_t \geq y\} = \{X_t \geq y\}$$

•

$$\mathbb{P}(S_t \geq y) = \mathbb{P}(B_t \geq y) + \mathbb{P}(X_t \geq y) = 2\mathbb{P}(B_t \geq y) = \mathbb{P}(|B_t| \geq y)$$