

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.03.20.

Definíció

$\mathcal{F}$ filtráció. Egy X folyamatot Itô folyamatnak hívunk (az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve), ha $X_0 \sim \mathcal{F}_0$ és léteznek

- μ, σ progresszívan mérhető folyamatok, melyekre $\int_0^t |\mu_s| + \sigma_s^2 ds < \infty$ egy valószínűséggel minden $t \geq 0$ -ra, valamint
- B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban

úgy, hogy

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

Példák.

- $X_t = t$, azaz X az idő ($X_0 = 0, \mu = 1, \sigma = 0$),
- B Brown mozgás $\mathcal{F}$ -ben $X_t = B_t$,
- $S_t = S_0 \exp\{(r - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\}$, $S_0 \sim \mathcal{F}_0$
- $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{1,2}$, $X_t = f(t, B_t)$

Definíció

X Itô folyamat ($X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$).

•

$$\mathcal{L}(X) = \{\varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és } \int_0^t |\varphi \mu| + \varphi^2 \sigma^2 < \infty \text{ m.b. mindent } t \geq 0\text{-ra}\}$$

• Ha $\varphi \in \mathcal{L}(X)$, akkor

$$I_t^X(\varphi) = \int_0^t \varphi_s \mu_s ds + \int_0^t \varphi_s \sigma_s dB_s$$

Hagyományos jelölés:

$$\int_0^t \varphi_s dX_s$$

$\varphi \in \mathcal{L}(X)$ -re $I^X(\varphi)$ nullából induló, folytonos trajektóriájú, adaptált;

$\varphi \mapsto I^X(\varphi)$ lineáris;

ha τ megállási idő, akkor $I_{t \wedge \tau}^X(\varphi) = I_t^X(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$.

X Itô folyamat

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

$\varphi^{(n)} \in \mathcal{L}(X)$ és

$$\int_0^t |\mu_s \varphi_s^{(n)}| + \sigma_s^2 (\varphi_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{p} 0 \quad \implies \quad I_t^X(\varphi^{(n)}) \xrightarrow{p} 0$$

Másképp fogalmazva $\varphi, \varphi^{(n)} \in \mathcal{L}(X)$ és

$$\int_0^t |\mu_s(\varphi_s - \varphi_s^{(n)})| + \sigma_s^2(\varphi_s - \varphi_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{p} 0 \quad \implies \quad I_t^X(\varphi^{(n)}) \xrightarrow{p} I_t^X(\varphi)$$

Állítás (Dominált konvergencia tétel)

$\varphi^{(n)}, \varphi \in \mathcal{L}(X)$, $\varphi^{(n)} \rightarrow \varphi$ $dt \times dP$ majdnem mindenütt és $\sup_n |\varphi^{(n)}| \in \mathcal{L}(X)$. Ekkor $I_t^X(\varphi^{(n)}) \xrightarrow{p} I_t^X(\varphi)$.

- Legyen $\xi \sim \mathcal{F}_s$, $\varphi = \xi \mathbb{1}_{[s, \infty)}$. Ekkor $\varphi \in \mathcal{L}(X)$.

$$\begin{aligned} I_t(\varphi) &= \int_0^t \xi \mathbb{1}_{(s \leq u)} \mu_u du + \int_0^t \xi \mathbb{1}_{(s \leq u)} \sigma_u dB_u \\ &= \xi \left(\int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq u)} \mu_u du + \int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq u)} \sigma_u dB_u \right) = \xi(X_t - X_{t \wedge s}) \end{aligned}$$

- $\varphi = \sum_i \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$, $\varphi_{t_i} \sim \mathcal{F}_{t_i}$, pl. φ egyszerű. Ekkor $\varphi \in \mathcal{L}(X)$ és

$$I_t^X(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (X_{t \wedge t_{i+1}} - X_{t \wedge t_i}).$$

- Megmutatható, hogy ha $\varphi \in \mathcal{L}(X)$, akkor létezik $\varphi^{(n)}$ egyszerűekből álló sorozat, amire

$$\int_0^t |\mu_s(\varphi_s - \varphi_s^{(n)})| + \sigma_s^2(\varphi_s - \varphi_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{p} 0 \quad \forall t \geq 0$$

és így

$$I_t^X(\varphi) = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} I_t^X(\varphi^{(n)})$$

- X felbontásában σ és B nem egyértelmű, de később kiszámoljuk, hogy μ és σ^2 igen. Azaz a definiált integrál, nem függ X felbontásától.

Lemma

φ folytonos trajektóriájú adaptált, X Itô folyamat

$$I_t^X(\varphi) = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i \varphi_{\frac{i}{n}} (X_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - X_{t \wedge \frac{i}{n}})$$

Legyen $\sigma_n(u) = \frac{i}{n}$, ha $\frac{i}{n} \leq u < \frac{i+1}{n}$. Ezzel a jelöléssel

$$\varphi^{(n)} = \sum_i \varphi_{\frac{i}{n}} \mathbb{1}_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} = \varphi \circ \sigma_n$$

$$\int_0^t \varphi_{\sigma_n(u)} dX_u = I_t^X(\varphi^{(n)}) = I_t^X(\varphi^{(n)} \mathbb{1}_{[0,t)}) = \sum_i \varphi_{\frac{i}{n}} (X_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - X_{t \wedge \frac{i}{n}})$$

és φ folytonossága miatt

$$\int_0^t |\mu_s(\varphi_s - \varphi_{\sigma_n(s)})| + \sigma_s^2(\varphi_s - \varphi_{\sigma_n(s)})^2 ds \leq (\sup_{s \leq t} |\varphi_s - \varphi_{\sigma_n(s)}| + \sup_{s \leq t} (\varphi_s - \varphi_{\sigma_n(s)})^2) \int_0^t |\mu_s| + \sigma_s^2 ds \rightarrow 0$$

Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 függvény, X Itô folyamat. $t_i = t \wedge \frac{i}{n}$

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_i f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}) = \\ &= \sum_i f'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) = \sum_i f'(X_{\frac{i}{n}})(X_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - X_{t \wedge \frac{i}{n}}) \xrightarrow{p} \int_0^t f'(X_s) dX_s \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i f''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \\ &+ \sum_i r(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \end{aligned}$$

ahol

$$r(x, y) = \int_0^1 \int_0^u f''(x + v(y - x)) - f''(x) dv du$$

A hibatagok összege limeszben eltűnik, ha $\sum (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ sztochasztikusan konvergens, amint a felosztás végtelenül finomodik. Ez akkor teljesül, ha X -nek van kvadratikus variációja.

Definíció (Emlékeztető)

X folyamat, a $[X]$ folyamat az X kvadratikus variációja, ha tetszőleges t esetén a $[0, t]$ minden végtelenül finomodó $(t_i^n)_{i=1}^{r_n}$ felosztás sorozatára

$$[X]_t = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2$$

Példák

- A Brown mozgásnak létezik kvadratikus variációja $[B]_t = t$.
- $X_t = t$, ekkor $[X]_t = 0$ minden t -re.

$$\sum_i (t_{i+1} - t_i)^2 \leq t \cdot \max_i (t_{i+1} - t_i)$$

- Ha $X_t = \int_0^t \mu_s ds$, akkor $[X] \equiv 0$

$$\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \leq \int_0^t |\mu_s| ds \cdot \max_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|$$

Definíció

X korlátos változású (véges variációjú, $X \in FV$), ha minden t -re

$$V_t = V_t^X = \sup \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| < \infty \quad \text{egy valószínűséggel}$$

ahol a szuprémumot $[0, t]$ felosztásaira vesszük.

Állítás

X folytonos trajektóriájú, korlátos változású. Ekkor $[X] \equiv 0$.

- (t_i) $[0, t]$ felosztása

$$\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \leq \max_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \cdot \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \leq V_t^X \max_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|$$

- Trajektóriák folytonossága fontos. N Poisson folyamat. $N \in FV$. $[N] = N$.

Állítás

B Brown mozgás. Ekkor minden $t > 0$ -ra

$$\sup \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| = \infty$$

ahol a szuprémumot a $[0, t]$ (t_i) felosztásaira vesszük.

B folytonos trajektóriájú, ha $V_t^B < \infty$, akkor $[B]_t = 0$ lenne, de $[B]_t = t > 0$.

Állítás

$$\mathbb{P}(\text{van olyan } 0 \leq a < b, \text{ hogy } B \text{ totális variációja } [a, b] \text{ véges}) = 0.$$

Állítás

Ha X Itô folyamat, akkor X -nek létezik kvadratikus variációja és

$$[X]_t = X_t^2 - X_0^2 - 2 \int_0^t X_s dX_s$$

- $s \leq t \leq T$

$$(X_t - X_s)^2 = X_t^2 - X_s^2 - 2X_s(X_t - X_s)$$

$$[X]_t - [X]_s = X_t^2 - X_s^2 - 2 \int_s^t X_u dX_u$$

$$(X_t - X_s)^2 - ([X]_t - [X]_s) = 2 \int_0^T \mathbb{1}_{(s \leq u \leq t)} (X_u - X_s) dX_u$$

- (t_i) a $[0, t]$ felosztása $\sigma(u) = t_i$, ha $u \in [t_i, t_{i+1})$.

$$\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 - ([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i}) = 2 \int_0^t (X_u - X_{\sigma(u)}) dX_u \xrightarrow{p} 0 \quad \text{ha a felosztás végtelenül finomodik}$$

Tegyük fel, hogy X -nek létezik kvadratikus variációja

- $[X]_0 = 0$
- $s \leq t$ -re $[X]_s \leq [X]_t$
- Ha φ folytonos trajektóriájú, akkor

$$\int_0^t \varphi_s d[X]_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \varphi_{t_i^n} ([X]_{t_{i+1}^n} - [X]_{t_i^n}) \quad (\text{Riemann-Stieltjes integrál})$$

ahol (t_i^n) a $[0, t]$ végtelenül finomodó felosztássorozata.

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 függvény, X Itô folyamat. $t_i = t \wedge \frac{i}{n}$

$$\begin{aligned}
 f(X_t) - f(X_0) &= \sum_i f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}) = \\
 &= \sum_i f'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \quad \xrightarrow{p} \int_0^t f'(X_s) dX_s \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_i f''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \quad \xrightarrow{p} \frac{1}{2} \int f''(X_s) d[X]_s \quad (\text{Riemann-Stieltjes integrál}) \\
 &+ \sum_i r(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \quad \xrightarrow{p} 0
 \end{aligned}$$

ahol

$$r(x, y) = \int_0^1 \int_0^u f''(x + v(y - x)) - f''(x) dv du$$

- $$\sum_i f''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = \sum_i f''(X_{t_i})((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 - ([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i})) + \sum_i f''(X_{t_i})([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i})$$
- $t_i = t \wedge \frac{i}{n}, \sigma_n(u) = \frac{i}{n}, \text{ ha } \frac{i}{n} \leq u < \frac{i+1}{n}$

$$\begin{aligned} \sum_i f''(X_{t_i})((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 - ([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i})) &= \sum_i f''(X_{t_i}) 2 \int_0^t (X_u - X_{t_i}) \mathbb{1}_{(t_i \leq u < t_{i+1})} dX_u \\ &= 2 \int_0^t f''(X_{\sigma_n(u)})(X_u - X_{\sigma_n(u)}) dX_u \xrightarrow{p} 0 \end{aligned}$$

Ugyanis

$$\psi_u = \max_{v \leq u} |f''(X_v)| \cdot 2 \max_{v \leq u} |X_v|$$

folyamatra ψ folytonos trajektóriájú, adaptált, azaz $\psi \in \mathcal{L}(X)$ és dominálja az integrandust, ami pontonként nullához tart.

- $$\sum_i f''(X_{t_i})([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i}) \rightarrow \int_0^t f''(X_s) d[X]_s$$

Tétel

X Itô folyamat, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2$. Ekkor

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d[X]_s$$

Célok:

- $[X]$ csak X lokális martingál részétől függ.
- $[X]$ kiszámítása a

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

felírásból.

Definíció

X, Y folyamat, a $[X, Y]$ folyamat az X és Y zárójele, ha tetszőleges t esetén a $[0, t]$ minden végtelenül finomodó $(t_i^n)_{i=1}^{r_n}$ felosztás sorozatára

$$[X, Y]_t = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n})$$

$$[X, X] = [X]$$

Állítás

Ha $[X], [Y]$ létezik, és $[Y] = 0$, akkor $[X, Y] = 0$ és $[X + Y] = [X]$.

Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség.

$$|\sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n})|^2 \leq \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \sum_i (Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n})^2 \xrightarrow{p} 0$$

$$(\Delta(X + Y))^2 = (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + 2\Delta X \Delta Y$$

•

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s = V_t + M_t,$$

ahol

$$V_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds, \quad M_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$$

•

$$[V] \equiv 0, \quad \implies \quad [X] = [M]$$

Azaz Itô folyamat kvadratikus variációját a lokális martingál rész határozza meg, az idő integrál ahhoz nem járul hozzá.

Állítás (Parciális integrálás)

Ha X, Y Itô folyamatok, akkor létezik az $[X, Y]$ zárójel folyamat és

$$[X, Y]_t = (XY)_t - (XY)_0 - \int_0^t X_s dY_s - \int_0^t Y_s dX_s$$

- $s \leq t \leq T$

$$(X_t - X_s)(Y_t - Y_s) = (XY)_t - (XY)_s - X_s(Y_t - Y_s) - Y_s(X_t - X_s)$$

$$[X, Y]_t - [X, Y]_s = (XY)_t - (XY)_s - \int_s^t X_u dY_u - \int_s^t Y_u dX_u$$

$$(X_t - X_s)(Y_t - Y_s) - ([X, Y]_t - [X, Y]_s) = \int_0^T \mathbb{1}_{(s \leq u < t)} (X_u - X_s) dY_u + \int_0^T \mathbb{1}_{(s \leq u < t)} (Y_u - Y_s) dX_u$$

- (t_i) a $[0, t]$ felosztása $\sigma(u) = t_i$, ha $u \in [t_i, t_{i+1})$. Ha a felosztás végtelenül finomodik:

$$\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) - ([X, Y]_{t_{i+1}} - [X, Y]_{t_i}) = \int_0^t (X_u - X_{\sigma(u)}) dY_u + \int_0^t (Y_u - Y_{\sigma(u)}) dX_u \xrightarrow{p} 0$$

Tegyük fel, hogy X, Y Itô folyamat.

- $[X, Y]_0 = 0$
- $[X, Y]_s = \frac{1}{2}([X + Y] - [X] - [Y])$, azaz $[X, Y] \in FV$.
- Ha φ folytonos trajektóriájú, akkor

$$\int_0^t \varphi_s d[X, Y]_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \varphi_{t_i^n} ([X, Y]_{t_{i+1}^n} - [X, Y]_{t_i^n})$$

ahol (t_i^n) a $[0, t]$ végtelenül finomodó felosztássorozata.

Tétel

$X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ d -dimenziós Itô folyamat, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2$. Ekkor

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t (\partial_k f)(X_s) dX_s^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^d \int_0^t (\partial_{k, \ell} f)(X_s) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_s$$

Rövidebb jelölés

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \cdot d[X]_s$$

Itt $f'(X_s)$ vektor értékű, $f'(X_s) \cdot dX_s = \sum_k (\partial_k f)(X_s) dX_s^{(k)}$ a „skaláris szorzat”

Hasonlóan $f''(X_s)$, $[X]$ $d \times d$ mátrix értékű, és

$$[X]^{k, \ell} = [X^{(k)}, X^{(\ell)}], \quad f''(X_s) \cdot d[X]_s = \sum_{k, \ell=1}^d (\partial_{k, \ell} f)(X_s) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_s$$

Tétel

$X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ d -dimenziós Itô folyamat, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2$. Ekkor

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t (\partial_k f)(X_s) dX_s^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^d \int_0^t (\partial_{k, \ell} f)(X_s) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_s$$

Ha $d = 2$, $X_t^{(1)} = t$, $X_t^{(2)} = B_t$, akkor lényegében visszkapjuk a Brown mozgásra vonatkozó formulát.

$$[X]_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

- $t_i = \frac{i}{n} \wedge t$

-

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_i f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i})$$

-

$$g(u) = f(x + u(y - x)), \quad f(y) - f(x) = g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \int_0^1 \int_0^v g''(u) - g''(0) du dv$$

-

$$f(X_t) - f(X_s) = f'(X_s)(X_t - X_s) + \frac{1}{2}(X_t - X_s)^T f''(X_s)(X_t - X_s) + (X_t - X_s)^T r(X_s, X_t)(X_t - X_s)$$

•

$$\begin{aligned}
 f(X_t) - f(X_0) &= \sum_i f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}) \\
 &= \sum_k \sum_i \partial_k f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)}) && \xrightarrow{p} \sum_k \int_0^t (\partial_k f)(X_s) dX_s^{(k)} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \sum_i (X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)}) \partial_{k,\ell} f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)}) && \xrightarrow{p} \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \int_0^t (\partial_{k,\ell} f)(X_s) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_s \\
 &+ \sum_{k,\ell} \sum_i r_{k,\ell}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})(X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)})(X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)}) && \xrightarrow{p} 0
 \end{aligned}$$

- $t_i = t \wedge \frac{i}{n}, \sigma_n(u) = \frac{i}{n}, \text{ ha } \frac{i}{n} \leq u < \frac{i+1}{n}.$

-

$$\sum_i \partial_{k,\ell} f(X_{t_i}) ((X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)})(X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)}) - ([X^{(k)}, X^{(\ell)}]_{t_{i+1}} - [X^{(k)}, X^{(\ell)}]_{t_i}))$$

$$\int_0^t \partial_{k,\ell} f(X_{\sigma_n(u)}) (X_u^{(k)} - X_{\sigma_n(u)}^{(k)}) dX_u^{(\ell)} + \int_0^t \partial_{k,\ell} f(X_{\sigma_n(u)}) (X_u^{(\ell)} - X_{\sigma_n(u)}^{(\ell)}) dX_u^{(k)} \xrightarrow{p} 0$$

-

$$\sum_i \partial_{k,\ell} f(X_{t_i}) ([X^{(k)}, X^{(\ell)}]_{t_{i+1}} - [X^{(k)}, X^{(\ell)}]_{t_i}) \xrightarrow{p} \int_0^t \partial_{k,\ell} f(X_u) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_u$$

•

$$\sum_{k,\ell} \sum_i r_{k,\ell}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}}) (X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)}) (X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)})$$

ahol

$$r_{k,\ell}(x, y) = \int_0^1 \int_0^u \partial_{k,\ell} f(x + v(y - x)) - \partial_{k,\ell} f(x) dv du$$

•

$$\begin{aligned} & \left| \sum_i r_{k,\ell}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}}) (X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)}) (X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)}) \right|^2 \\ & \leq \max_i |r_{k,\ell}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})|^2 \sum_i (X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)})^2 \sum_i (X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)})^2 \xrightarrow{p} 0 \end{aligned}$$

Lemma

Ha X, Y Itô folyamatok és $X_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$, akkor

$$[X, Y]_t = \int_0^t \sigma_s d[B, Y]_s$$

Következmény

$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$. Ekkor

$$[X]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$$

$[X, Y]$, ha $X = I(\varphi)$ és φ egyszerű

- $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$, $X = I(\varphi)$.
- Y Itô folyamat

$$[X, Y]_t = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_j (X_{s_{j+1}^{(n)}} - X_{s_j^{(n)}})(Y_{s_{j+1}^{(n)}} - Y_{s_j^{(n)}})$$

ahol $(s_j^{(n)})$ a $[0, t]$ végtelenül finomodó felosztássorozata.

- Feltehető, hogy $t_r = t$ és $\{t_0, \dots, t_r\} \subset \{s_0^{(n)}, s_1^{(n)}, \dots\}$ minden n -re.
-

$$\begin{aligned} \sum_j (X_{s_{j+1}^{(n)}} - X_{s_j^{(n)}})(Y_{s_{j+1}^{(n)}} - Y_{s_j^{(n)}}) &= \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \sum_{t_i \leq s_j^{(n)} < t_{i+1}} (B_{s_{j+1}^{(n)}} - B_{s_j^{(n)}})(Y_{s_{j+1}^{(n)}} - Y_{s_j^{(n)}}) \\ &\xrightarrow{p} \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} ([B, Y]_{t_{i+1}} - [B, Y]_{t_i}) = \int_0^t \varphi_s d[B, Y]_s \end{aligned}$$

$[X, Y]$, ha $X = I(\varphi)$ és $\varphi \in \mathcal{S}$

- $\varphi^{(n)}$ egyszerű integrandusokból álló (gyorsan) közelítő sorozat φ -hez.
- $X^{(n)} = I(\varphi^{(n)})$, $X^{(n)} \rightarrow X$ egy valószínűséggel lokálisan egyenletesen.
-

$$\begin{aligned} [X^{(n)}, Y]_t &= \int_0^t \varphi_u^{(n)} d[B, Y]_u && \xrightarrow{p} \int_0^t \varphi_u d[B, Y]_u \quad \text{később} \\ &= (X^{(n)}Y)_t - \int_0^t X_u^{(n)} dY_u - \int_0^t Y_u \varphi_u^{(n)} dB_u && \xrightarrow{p} (XY)_t - \int_0^t X_u dY_u - \int_0^t Y_u \varphi_u dB_u = [X, Y]_t \end{aligned}$$

Ugyanis

$$\int_0^t Y_u^2 (\varphi_u - \varphi_u^{(n)})^2 du \leq \sup_{u \leq t} Y_u^2 \int_0^t (\varphi_u - \varphi_u^{(n)})^2 du \xrightarrow{p} 0$$

és

$$\sup_{u \leq t} |X_u^{(n)} - X_u| \rightarrow 0 \quad \text{miatt} \quad \int_0^t |X_u^{(n)} - X_u| |\mu_u^Y| + |X_u^{(n)} - X_u|^2 (\sigma_u^Y)^2 du \rightarrow 0$$