

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.03.19.

$$f \in C^{1,2}, t_i^n = t \wedge \frac{i}{n}.$$

$$\begin{aligned} f(t, B_t) - f(0, B_0) &= \sum_i f(t_{i+1}^n, B_{t_{i+1}^n}) - f(t_i^n, B_{t_i^n}) \\ &= \sum_i (\partial_1 f)(t_{n,i}^*, B_{t_{i+1}^n})(t_{i+1}^n - t_i^n) && \rightarrow \int_0^t (\partial_1 f)(s, B_s) ds \\ &\quad + \sum_i (\partial_2 f)(t_i^n, B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}) && \xrightarrow{p} \int_0^t (\partial_2 f)(s, B_s) dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_i (\partial_2^2 f)(t_i^n, B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 && \xrightarrow{p} \text{Itô korrekciós tag=?} \\ &\quad + \sum_i r(t_i^n, B_{t_i^n}, B_{t_{i+1}^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 && \xrightarrow{p} 0 \end{aligned}$$

- Az első tagban $\varphi_s = (\partial_1 f)(s, B_s)$ folytonos trajektóriájú, $\varphi^{(n)} = \sum_i (\partial_1 f)(t_{n,i}^*, B_{t_{i+1}^n}) \mathbb{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n]} \varphi^{(n)} \rightarrow \varphi$ a $[0, t]$ -n egyenletesen (egy valószínűséggel).
- A második tagban az integrál kiszámítására szolgáló formulát használtuk: $\varphi_s = (\partial_2 f)(s, B_s)$.
- Az utolsó sorban, a hibatagok összege nullához tart.

Állítás

φ folytonos trajektóriájú. Ekkor $\int_0^t \varphi_s ds = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i \varphi_{t_i^n} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2$.

$\varphi_s = (\partial_{22} f)(s, B_s)$ választással kapjuk, az Itô korrekciós tagot.

- $t_i^n = t \wedge \frac{i}{n}$ jelöléssel elég, hogy

$$\text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i \varphi_{t_i^n} \left((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n) \right) = 0, \quad \text{mert} \quad \sum_i \varphi_{t_i^n} (t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow \int_0^t \varphi_s ds$$

- $0 \leq s \leq t$

$$(B_t - B_s)^2 = B_t^2 - B_s^2 - 2B_s(B_t - B_s)$$

$$t = B_t^2 - 2 \int_0^t B_u dB_u$$

$$s = B_s^2 - 2 \int_0^s B_u dB_u$$

$$(B_t - B_s)^2 - (t - s) = 2 \int_s^t B_u dB_u - 2B_s(B_t - B_s) = 2 \int_s^t (B_u - B_s) dB_u$$

- $\sigma_n(u) = i/n$, ha $\frac{i}{n} \leq u < \frac{i+1}{n}$, φ folytonos, adaptált.

$$\sum_i \varphi_{t_i} ((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)) = \sum_i \varphi_{t_i} 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} (B_u - B_{\sigma_n(u)}) dB_u = 2 \int_0^t \varphi_{\sigma_n(u)} (B_u - B_{\sigma_n(u)}) dB_u$$

- Szkorohod egyenlőtlenség alapján:

$$\int_0^t \varphi_{\sigma_n(u)}^2 (B_u - B_{\sigma_n(u)})^2 du \leq \max_{s \leq t} \varphi_s^2 \int_0^t (B_u - B_{\sigma_n(u)})^2 du \xrightarrow{p} 0 \implies \int_0^t \varphi_{\sigma_n(u)} (B_u - B_{\sigma_n(u)}) dB_u \xrightarrow{p} 0.$$

$\xi I(\varphi \mathbb{1}_{[s,\infty)}) = I(\xi \varphi \mathbb{1}_{[s,\infty)})$, ha $\xi \sim \mathcal{F}_s$. Részletesebben

$\xi \sim \mathcal{F}_s$ **korlátos**, $\varphi = \sum_i \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$ egyszerű és $\varphi = \varphi \mathbb{1}_{[s,\infty)}$.

- Feltehető, hogy $t_i \geq s$ minden i -re.
- $\xi \varphi$ is egyszerű

$$\xi I_t(\varphi) = \xi \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t \wedge t_{i+1}} - B_{t \wedge t_i}) = \sum_i (\xi \varphi)_{t_i} (B_{t \wedge t_{i+1}} - B_{t \wedge t_i}) = I(\xi \varphi)$$

$\varphi \in \mathcal{L}$, $\varphi = \varphi \mathbb{1}_{[s,\infty)}$

- $\varphi^{(n)}$ egyszerű, $\int_0^t (\varphi_s - \varphi_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{p} 0$, ekkor $\int_0^t (\xi \varphi_s - \xi \varphi_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{p} 0$ szintén teljesül.
- $\varphi^{(n)} = \varphi^{(n)} \mathbb{1}_{[s,\infty)}$ feltehető, mert ez is jó közelítő sorozat.
- $\xi I_t(\varphi) = \lim \xi I_t(\varphi^{(n)}) = \lim I_t(\xi \varphi^{(n)}) = I_t(\xi \varphi)$

$\xi \sim \mathcal{F}_s$ tetszőleges, $\varphi = \varphi \mathbb{1}_{[s,\infty)} \in \mathcal{L}$.

$$\int_0^t (\xi \mathbb{1}_{(|\xi| \leq K)} \varphi_u - \xi \varphi_u)^2 du \xrightarrow{p} 0 \quad \implies \quad I_t(\xi \varphi) = \lim_{K \rightarrow \infty} I_t(\xi \mathbb{1}_{(|\xi| \leq K)} \varphi) = \lim_{K \rightarrow \infty} \xi \mathbb{1}_{(|\xi| \leq K)} I_t(\varphi) = \xi I_t(\varphi)$$

$$f \in C^{1,2}, t_i^n = t \wedge \frac{i}{n}.$$

$$\begin{aligned} f(t, B_t) - f(0, B_0) &= \sum_i f(t_{i+1}^n, B_{t_{i+1}^n}) - f(t_i^n, B_{t_i^n}) \\ &= \sum_i (\partial_1 f)(t_{n,i}^*, B_{t_{i+1}^n})(t_{i+1}^n - t_i^n) && \rightarrow \int_0^t (\partial_1 f)(s, B_s) ds \\ &\quad + \sum_i (\partial_2 f)(t_i^n, B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}) && \xrightarrow{p} \int_0^t (\partial_2 f)(s, B_s) dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_i (\partial_2^2 f)(t_i^n, B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 && \xrightarrow{p} \frac{1}{2} \int_0^t (\partial_2^2 f)(s, B_s) ds \\ &\quad + \sum_i r(t_i^n, B_{t_i^n}, B_{t_{i+1}^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 && \xrightarrow{p} 0 \end{aligned}$$

Tétel

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, $f \in C^{1,2}$. Ekkor

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t (f_t + \frac{1}{2} f_{xx})(s, B_s) ds + \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s.$$

- $M_t = \exp\left\{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right\}.$

Ekkor $M_t = f(t, B_t)$, ahol $f(t, x) = e^{\lambda x - \lambda^2 t/2}.$

$$f_t = -\frac{\lambda^2}{2}f, \quad f_x = \lambda f, \quad f_{xx} = \lambda^2 f, \quad f_t + \frac{1}{2}f_{xx} = 0$$

$$\begin{aligned} M_t = f(t, B_t) &= f(0, B_0) + \int_0^t (f_t + \frac{1}{2}f_{xx})(s, B_s)ds + \int_0^t f_x(s, B_s)dB_s \\ &= 1 + \int_0^t \lambda M_s dB_s \end{aligned}$$

- $\lambda M \in \mathcal{S}$, ugyanis

$$\mathbb{E}(M_s^2) = \mathbb{E}(e^{2\lambda B_s - \lambda^2 s}) = e^{\lambda^2 s}, \quad \int_0^t \mathbb{E}(\lambda^2 M_s^2)ds < \infty, \quad \forall t \geq 0$$

- $M_t = \exp\left\{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right\}$, τ megállási idő.
- $M_t = 1 + I_t(\lambda M)$, így $M_{t \wedge \tau} = 1 + I_t(\lambda M \mathbb{1}_{[0, \tau]})$ és $((M_{t \wedge \tau})_{t \geq 0})$ martingál ($\lambda M \mathbb{1}_{[0, \tau]} \in \mathcal{S}$).
- $a > 0$, $\tau = m_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$

$$1 = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_{t \wedge \tau}) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{\lambda B_{t \wedge \tau} - \frac{\lambda^2}{2}t \wedge \tau\right\}\right)$$

- $\tau < \infty$ egy valószínűséggel

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left\{\lambda B_{t \wedge \tau} - \frac{\lambda^2}{2}t \wedge \tau\right\} = \exp\left\{\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2}\tau\right\} = \exp\left\{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}\tau\right\}$$

- $\lambda > 0 \implies M_{t \wedge \tau} \leq e^{a\lambda}$

$$e^{\lambda a} \mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau}\right) = \mathbb{E}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} M_{t \wedge \tau}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_{t \wedge \tau}) = 1.$$

$$\alpha = \frac{\lambda^2}{2}, \text{ azaz } \lambda = \pm\sqrt{2\alpha}, \lambda > 0$$

$$\mathbb{E}(e^{-\alpha\tau}) = \mathbb{E}(e^{-\alpha m_a}) = e^{-a\sqrt{2\alpha}}$$

- B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, $a > 0$ $X_t = B_t - at$. X negatív driftes Brown mozgás.
- $M_t = \exp\{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}$ martingál. M fejlődése:

$$M_t = 1 + \lambda \int_0^t M_s dB_s.$$

Láttuk, hogy $\lambda M \in \mathcal{S}$

- τ megállási idő $\mathcal{F}$ -ben. $N_t = M_{t \wedge \tau}$. Ekkor

$$N_t = 1 + I_{t \wedge \tau}(\lambda M) = 1 + I_t(\lambda M \mathbb{1}_{[0, \tau]}) = 1 + \int_0^t \lambda M_s \mathbb{1}_{(s \leq \tau)} dB_s$$

N az M megállításával kapott folyamat, N is négyzetesen integrálható martingál.

- Legyen $a, x > 0$, $\lambda = 2a$ és $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq x\}$. Ezzel a választással $M_t = \exp\{2aX_t\}$, $N_t = \exp\{2aX_{t \wedge \tau}\}$. $N_t \leq e^{2ax}$ és $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty$ miatt $\lim N_t = e^{2ax} \mathbb{1}_{(\tau < \infty)}$

$$1 = \mathbb{E}(N_0) = \mathbb{E}(N_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} N_t\right) = e^{2ax} \mathbb{P}(\tau < \infty) = e^{2ax} \mathbb{P}\left(\sup_{t \geq 0} B_t - at \geq x\right)$$

$$\sup_{t \geq 0} B_t - at \sim \exp(2a).$$

- B Brown mozgás, $H_t = B_t - tB_1$, $t \in [0, 1]$. Ekkor H Brown híd és H független B_1 -től. (H folytonos trajektóriájú Gauss folyamat, nulla várható értékkel és $\text{cov}(H_s, H_t) = s \wedge t - st$ kovariancia függvénnyel.)

- $X_t = (1+t)H_{t/(1+t)}$, $t \geq 0$ folytonos trajektóriájú, nulla várható értékű Gauss folyamat, amire $0 \leq s \leq t$ -re

$$\text{cov}(X_s, X_t) = (1+s)(1+t) \text{cov}(H_{s/(1+s)}, H_{t/(1+t)}) = (1+s)(1+t) \left(\frac{s}{1+s} - \frac{s}{1+s} \frac{t}{1+t} \right) = s(1+t) - st = s$$

X Brown mozgás.

- $a, b > 0$

$$\begin{aligned} \{\exists s \in [0, 1], H_s \geq bs + (1-s)a\} &= \{\exists t \geq 0, (1+t)H_{t/(1+t)} \geq (1+t)((b-a)\frac{t}{1+t} + a)\} \\ &= \{\exists t \geq 0, X_t \geq (b-a)t + a(1+t)\} \\ &= \{\exists t \geq 0, X_t - bt \geq a\} \end{aligned}$$

•

$$\mathbb{P}(\exists s \in [0, 1], H_s \geq bs + a(1-s)) = \mathbb{P}\left(\sup_t X_t - bt \geq a\right) = e^{-2ba}$$

H Brown híd, $a, b > 0$. Ekkor $\mathbb{P}(\exists s \in [0, 1] H_s \geq bs + a(1-s)) = e^{-2ab}$.

- B Brown mozgás, $H_t = B_t - tB_1$, $t \in [0, 1]$. Ekkor H Brown híd és H független B_1 -től.
- $x > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{s \in [0, 1]} B_s \geq x\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{P}\left(\max_{s \in [0, 1]} H_s + sB_1 \geq x | B_1\right)\right) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(\exists s \in [0, 1], H_s \geq x - sy) |_{y=B_1})$$

•

$$\mathbb{P}(\exists s \in [0, 1], H_s \geq x - sy) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x - y \leq 0 \\ e^{-2x(x-y)} & \text{ha } x - y > 0 \end{cases}$$

•

$$e^{-2x(x-y)} = e^{2xy-2x^2} = e^{-\frac{1}{2}(-4xy+4x^2)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(y-2x)^2}}{e^{-\frac{1}{2}y^2}} = \frac{f_{Z+2x}(y)}{f_Z(y)}, \quad \text{ahol } Z \sim N(0, 1)$$

•

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{s \in [0, 1]} B_s \geq x\right) &= \mathbb{P}(B_1 > x) + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(B_1 \leq x)} \frac{f_{Z+2x}}{f_Z}(B_1)\right) \\ &= \mathbb{P}(B_1 > x) + \int_{-\infty}^x f_{Z+2x}(y) dy = \mathbb{P}(B_1 > x) + \mathbb{P}(B_1 + 2x \leq x) = \mathbb{P}(|B_1| \geq x) \end{aligned}$$

- Skála invariancia: Ha B Brown mozgás $X_t = \sqrt{T}B_{t/T}$, akkor X is az.

-

$$S_T \stackrel{d}{=} \max_{t \leq T} X_t = \sqrt{T} \max_{t \leq T} B_{t/T} = \sqrt{T} \max_{u \leq 1} B_u \stackrel{d}{=} \sqrt{T} |B_1| \stackrel{d}{=} |B_T|$$

Megjegyzés

Minden t -re S_t és $|B_t|$ azonos eloszlású, de az

$(S_t)_{t \geq 0}$ folyamat és az $(|B_t|)_{t \geq 0}$ folyamat nem azonos eloszlású.

S trajektóriái monoton nőnek, $t > 0$ -ra $S_t \neq 0$, míg az $|B|$ folyamatnak tetszőleges T -re $(0, T)$ -ben egy valószínűséggel van nullhelye.

- B Brown mozgás, $a > 0$, $\tau = m_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$
- $B_t \stackrel{d}{=} \sqrt{t}Z$, ahol $Z \sim N(0, 1)$

$$\mathbb{P}(\tau \leq t) = \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq u \leq t} B_u \geq a\right) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a) = \mathbb{P}(tZ^2 \geq a^2) = \mathbb{P}\left(\frac{a^2}{Z^2} \leq t\right)$$

- Összefoglalva, tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$m_a \stackrel{d}{=} \frac{a^2}{Z^2} \quad \text{ahol } Z \sim N(0, 1)$$

- $Z^2 \sim \Gamma_{1/2, 1/2}$, $\varphi(x) = a^2/x$,

$$f_{a^2/Z^2} = f_{\varphi(Z^2)} = (f_{Z^2} \circ \varphi^{-1}) \cdot |(\varphi^{-1})'|$$

- Itt

$$f_{Z^2}(t) = \mathbb{1}_{(t>0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-1/2} e^{-t/2}, \quad \text{és} \quad \varphi^{-1}(t) = a^2/t$$

- Kendall azonosság

$$f_{m_a}(t) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/(2t)} \mathbb{1}_{(t>0)} = \frac{|a|}{t} f_{B_t}(a) \mathbb{1}_{(t>0)}$$

- B Brown mozgás $d = \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}$.
- $\beta_t = B_{1+t} - B_1$ jelöléssel $(\beta_t)_{t \geq 0}$ a Markov tulajdonság alapján $\mathcal{F}_1$ -től független Brown mozgás, $m_a = \inf\{t \geq 0 : \beta_t = a\}$ a β szintelérési ideje.

$$\{d \leq 1 + t\} = \{m_{-B_1} \leq t\}$$

- Láttuk, hogy $m_a \stackrel{d}{=} \frac{a^2}{Z^2}$, ahol $Z \sim N(0, 1)$:

$$\mathbb{P}(d \leq 1 + t \mid \mathcal{F}_1) = \mathbb{P}(m_a \leq t) \big|_{a=-B_1} = \mathbb{P}\left(\frac{a^2}{Z^2} \leq t\right) \bigg|_{a=-B_1}$$

- X, Y független $N(0, 1)$ -ek

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y^2}{X^2} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\frac{Y^2}{X^2} \leq t \mid Y\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{P}\left(\frac{a^2}{X^2} \leq t\right) \bigg|_{a=Y}\right) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(m_a \leq t) \big|_{a=-B_1}) = \mathbb{P}(d \leq 1 + t)$$

- Összefoglalva

$$\inf\{t \geq 1 : B_t = 0\} \stackrel{d}{=} \frac{X^2 + Y^2}{X^2}, \quad \text{ahol } X, Y \text{ független } N(0, 1)$$

-

$$d = \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}, \quad g = \max\{t \in [0, 1] : B_t = 0\}$$

- X, Y független $N(0, 1)$ -ek $\varphi = \arg(X, Y) \sim U(0, 2\pi)$

$$g \stackrel{d}{=} \frac{1}{d} \stackrel{d}{=} \frac{X^2}{X^2 + Y^2} = \sin^2 \varphi$$

- $t \in [0, 1]$ -re

$$\mathbb{P}(g < t) = \mathbb{P}(|\sin \varphi| < \sqrt{t}) = \frac{4 \arcsin \sqrt{t}}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}$$

Az egy előtti utolsó nullhely arkusz szinusz eloszlású

Ez azonos a Béta($1/2, 1/2$) eloszlással, ugyanis a sűrűségfüggvénye a $t \in (0, 1)$ -re

$$f_g(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \arcsin \sqrt{t} = \frac{1}{\pi \sqrt{t(1-t)}}$$

- B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban.
- $f(t, x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right)$, ha $0 \leq t < 1$, ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvénye. $\varphi = \Phi'$ a sűrűségfüggvény, $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$.

$$f_t(t, x) = \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right) \cdot \frac{x}{2(1-t)^{3/2}},$$

$$f_x(t, x) = \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right) \cdot \frac{1}{(1-t)^{1/2}},$$

$$f_{xx}(t, x) = -\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right) \frac{x}{(1-t)^{1/2}} \cdot \left(\frac{1}{(1-t)^{1/2}}\right)^2$$

- $f_t + \frac{1}{2}f_{xx} = 0$ és $0 \leq t < 1$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1 > 0 | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(B_1 - B_t + B_t > 0 | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}} > -\frac{B_1 - B_t}{\sqrt{1-t}}\right)\Big|_{x=B_t} \\ &= \Phi\left(\frac{B_t}{\sqrt{1-t}}\right) = \Phi(B_0) + \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s.\end{aligned}$$

- Ha $t \rightarrow 1$, akkor $\mathbb{P}(B_1 > 0 | \mathcal{F}_t) \rightarrow \mathbb{1}_{(B_1 > 0)}$. Azaz $M_t = \mathbb{P}(B_1 > 0 | \mathcal{F}_t)$ martingál $\mathcal{F}$ -ben, aminek a fejlődése

$$M_t = \frac{1}{2} + \int_0^t \psi_s dB_s, \quad \psi_s = \mathbb{1}_{(s < 1)} f_x(s, B_s)$$

- $M_t = \mathbb{P}(B_1 > 0 | \mathcal{F}_t)$ martingál $\mathcal{F}$ -ben, aminek a fejlődése

$$M_t = \frac{1}{2} + \int_0^{t \wedge 1} \psi_s dB_s, \quad \psi_s = \mathbb{1}_{(s < 1)} f_x(s, B_s), \quad f_x(s, x) = \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{1-s}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-s}}$$

- $\psi \in \mathcal{S}$ ugyanis $s < 1$ -re

$$\begin{aligned} 2\pi \mathbb{E}\left(\varphi^2\left(\frac{B_s}{\sqrt{1-s}}\right)\right) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\frac{x^2}{2(1-s)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{2}{1-s} + \frac{1}{s}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1+s}{s(1-s)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} dx = \left(\frac{s(1-s)}{1+s}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}}. \end{aligned}$$

$$2\pi \int_0^1 \mathbb{E}(\psi_s^2) ds = \int_0^1 \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{1-s} ds \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s}} ds = \left[-2\sqrt{1-s}\right]_{s=0}^{s=1} = 2.$$

- Általánosabban is igaz, ha X lokális martingál egy B Brown mozgás természetes filtrációjában, akkor $X = X_0 + I(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{L}$, ahol φ „lényegében” egyértelmű és ha X négyzetesen integrálható, akkor $\varphi \in \mathcal{S}$.

- $f(t, x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right)$, $0 \leq t < 1$. $f_t + \frac{1}{2}f_{xx} = 0$ a és f sima $(0, 1) \times \mathbb{R}$ halmazon.
- $f_{xt} + \frac{1}{2}f_{xxx} = \partial_x(f_t + \frac{1}{2}f_{xx}) = 0$

$$f_x(t, B_t) = f_x(0, B_0) + \int_0^t f_{xx}(s, B_s) dB_s$$

- $\psi_s = \mathbb{1}_{(s < 1)} f_{xx}(s, B_s)$. $\psi \in \mathcal{L}$:

$$f_{xx}(s, B_s) = -\varphi\left(\frac{B_s}{\sqrt{1-s}}\right) \cdot \frac{B_s}{2(1-s)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{B_s^2}{2(1-s)}\right\} \cdot \frac{B_s}{2(1-s)^{3/2}}$$

ψ a folytonos, adaptált (s, B_s) mérhető függvénye, azaz progresszíven mérhető és

$$\int_0^1 \psi_s^2 ds = c \cdot \int_0^1 \exp\left\{-\frac{B_s^2}{1-s}\right\} \cdot \frac{B_s^2}{(1-s)^3} ds \leq c \int_0^1 \min\left(c_1 \frac{1}{(1-s)^2}, c_2 \frac{1}{B_s^4}\right) ds < \infty \quad \text{ha } B_1 \neq 0$$

ahol $c_1 = \sup_{x>0} x e^{-x} = e^{-1}$ és $c_2 = \sup_{x>0} e^{-x} x^3 < \infty$.

Példa olyan lokális martingálra, ami nem martingál

- $f(t, x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right)$, $0 \leq t < 1$. $f_t + \frac{1}{2}f_{xx} = 0$ a és f sima $(0, 1) \times \mathbb{R}$ halmazon.
- $f_{xt} + \frac{1}{2}f_{xxx} = \partial_x(f_t + \frac{1}{2}f_{xx}) = 0$

$$f_x(t, B_t) = f_x(0, B_0) + \int_0^t f_{xx}(s, B_s) dB_s, \quad \text{ha } t < 1$$

- $\psi_s = \mathbb{1}_{(s < 1)} f_{xx}(s, B_s)$. $\psi \in \mathcal{L}$.
- $X_t = f_x(0, B_0) + \int_0^t \psi_s dB_s$. X folytonos trajektóriájú lokális martingál.
- $t < 1$, $X_t = f_x(t, B_t)$.

$$\lim_{t \nearrow 1} f_x(t, B_t) = \lim_{t \nearrow 1} \varphi\left(\frac{B_t}{\sqrt{1-t}}\right) \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 0, \quad \text{a } \{B_1 \neq 0\} \text{ eseményen.}$$

- X nem lehet martingál, mert $\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0) = 0 \neq X_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

További példa $\varphi \in \mathcal{L}$ integrandusra, amire $I(\varphi)$ nem martingál

- X Brown mozgás $\mathcal{F}$ -ben. $B_t = X_{1+t} - X_1$ az 1 pillanatban újra induló Brown mozgás, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{1+t}$.
- B Brown mozgás $\mathcal{G}$ -ben. $\varphi = X_1^{-2} \mathbb{1}_{[0, \infty)} \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$.
- $I(\varphi)$ lokális martingál.

$$I_t(\varphi) = X_1^{-2} B_t.$$

- $X_1 \sim \mathcal{G}_0$ és B_t függetlensége miatt:

$$\mathbb{E}(|I_t(\varphi)|) = \mathbb{E}(X_1^{-2} |B_t|) = \mathbb{E}(X_1^{-2}) \mathbb{E}(|B_t|) = \infty, \quad \text{minden } t > 0\text{-ra}$$

$I(\varphi)$ lokális martingál, de nem martingál, mert nem integrálható változókból áll.

Definíció

$\mathcal{F}$ filtráció. Egy X folyamatot Itô folyamatnak hívunk (az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve), ha $X_0 \sim \mathcal{F}_0$ és léteznek

- μ, σ progresszívan mérhető folyamatok, melyekre $\int_0^t |\mu_s| + \sigma_s^2 ds < \infty$ egy valószínűséggel minden $t \geq 0$ -ra, valamint
- B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban

úgy, hogy

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

Példák.

- $X_t = t$, azaz X az idő ($X_0 = 0, \mu = 1, \sigma = 0$),
- B Brown mozgás $\mathcal{F}$ -ben $X_t = B_t$,
- $S_t = S_0 \exp\{(r - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\}$, $S_0 \sim \mathcal{F}_0$
- $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{1,2}$, $X_t = f(t, B_t)$

Definíció

X Itô folyamat ($X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$).

•

$$\mathcal{L}(X) = \{\varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és } \int_0^t |\varphi \mu| + \varphi^2 \sigma^2 < \infty \text{ m.b. mindent } t \geq 0\text{-ra}\}$$

• Ha $\varphi \in \mathcal{L}(X)$, akkor

$$I_t^X(\varphi) = \int_0^t \varphi_s \mu_s ds + \int_0^t \varphi_s \sigma_s dB_s$$

Hagyományos jelölés:

$$\int_0^t \varphi_s dX_s$$

$\varphi \in \mathcal{L}(X)$ -re $I^X(\varphi)$ nullából induló, folytonos trajektóriájú, adaptált;

$\varphi \mapsto I^X(\varphi)$ lineáris;

ha τ megállási idő, akkor $I_{t \wedge \tau}^X(\varphi) = I_t^X(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$.

X Itô folyamat

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

$\varphi^{(n)} \in \mathcal{L}(X)$ és

$$\int_0^t |\mu_s \varphi_s^{(n)}| + \sigma_s^2 (\varphi_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{p} 0 \quad \implies \quad I_t^X(\varphi^{(n)}) \xrightarrow{p} 0$$

Másképp fogalmazva $\varphi, \varphi^{(n)} \in \mathcal{L}(X)$ és

$$\int_0^t |\mu_s(\varphi_s - \varphi_s^{(n)})| + \sigma_s^2(\varphi_s - \varphi_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{p} 0 \quad \implies \quad I_t^X(\varphi^{(n)}) \xrightarrow{p} I_t^X(\varphi)$$

Állítás (Dominált konvergencia tétel)

$\varphi^{(n)}, \varphi \in \mathcal{L}(X)$, $\varphi^{(n)} \rightarrow \varphi$ $dt \times dP$ majdnem mindenütt és $\sup_n |\varphi^{(n)}| \in \mathcal{L}(X)$. Ekkor $I_t^X(\varphi^{(n)}) \xrightarrow{p} I_t^X(\varphi)$.

- Legyen $\xi \sim \mathcal{F}_s$, $\varphi = \xi \mathbb{1}_{[s, \infty)}$. Ekkor $\varphi \in \mathcal{L}(X)$.

$$\begin{aligned} I_t(\varphi) &= \int_0^t \xi \mathbb{1}_{(s \leq u)} \mu_u du + \int_0^t \xi \mathbb{1}_{(s \leq u)} \sigma_u dB_u \\ &= \xi \left(\int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq u)} \mu_u du + \int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq u)} \sigma_u dB_u \right) = \xi(X_t - X_{t \wedge s}) \end{aligned}$$

- $\varphi = \sum_i \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$, $\varphi_{t_i} \sim \mathcal{F}_{t_i}$, pl. φ egyszerű. Ekkor $\varphi \in \mathcal{L}(X)$ és

$$I_t^X(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (X_{t \wedge t_{i+1}} - X_{t \wedge t_i}).$$

- Megmutatható, hogy ha $\varphi \in \mathcal{L}(X)$, akkor létezik $\varphi^{(n)}$ egyszerűekből álló sorozat, amire

$$\int_0^t |\mu_s(\varphi_s - \varphi_s^{(n)})| + \sigma_s^2(\varphi_s - \varphi_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{p} 0 \quad \forall t \geq 0$$

és így

$$I_t^X(\varphi) = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} I_t^X(\varphi^{(n)})$$

- X felbontásában σ és B nem egyértelmű, de később kiszámoljuk, hogy μ és σ^2 igen. Azaz a definiált integrál, nem függ X felbontásától.

Lemma

φ folytonos trajektóriájú adaptált, X Itô folyamat

$$I_t^X(\varphi) = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i \varphi_{\frac{i}{n}} (X_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - X_{t \wedge \frac{i}{n}})$$

Legyen $\sigma_n(u) = \frac{i}{n}$, ha $\frac{i}{n} \leq u < \frac{i+1}{n}$. Ezzel a jelöléssel

$$\varphi^{(n)} = \sum_i \varphi_{\frac{i}{n}} \mathbb{1}_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} = \varphi \circ \sigma_n$$

$$\int_0^t \varphi_{\sigma_n(u)} dX_u = I_t^X(\varphi^{(n)}) = I_t^X(\varphi^{(n)} \mathbb{1}_{[0,t)}) = \sum_i \varphi_{\frac{i}{n}} (X_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - X_{t \wedge \frac{i}{n}})$$

és φ folytonossága miatt

$$\int_0^t |\mu_s(\varphi_s - \varphi_{\sigma_n(s)})| + \sigma_s^2(\varphi_s - \varphi_{\sigma_n(s)})^2 ds \leq (\sup_{s \leq t} |\varphi_s - \varphi_{\sigma_n(s)}| + \sup_{s \leq t} (\varphi_s - \varphi_{\sigma_n(s)})^2) \int_0^t |\mu_s| + \sigma_s^2 ds \rightarrow 0$$

Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 függvény, X Itô folyamat. $t_i = t \wedge \frac{i}{n}$

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_i f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}) = \\ &= \sum_i f'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) = \sum_i f'(X_{\frac{i}{n}})(X_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - X_{t \wedge \frac{i}{n}}) \xrightarrow{p} \int_0^t f'(X_s) dX_s \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i f''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \\ &+ \sum_i r(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \end{aligned}$$

ahol

$$r(x, y) = \int_0^1 \int_0^u f''(x + v(y - x)) - f''(x) dv du$$

A hibatagok összege limeszben eltűnik, ha $\sum (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ sztochasztikusan konvergens, amint a felosztás végtelenül finomodik. Ez akkor teljesül, ha X -nek van kvadratikus variációja.

Definíció (Emlékeztető)

X folyamat, a $[X]$ folyamat az X kvadratikus variációja, ha tetszőleges t esetén a $[0, t]$ minden végtelenül finomodó $(t_i^n)_{i=1}^{r_n}$ felosztás sorozatára

$$[X]_t = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2$$

Példák

- A Brown mozgásnak létezik kvadratikus variációja $[B]_t = t$.
- $X_t = t$, ekkor $[X]_t = 0$ minden t -re.

$$\sum_i (t_{i+1} - t_i)^2 \leq t \cdot \max_i (t_{i+1} - t_i)$$

- Ha $X_t = \int_0^t \mu_s ds$, akkor $[X] \equiv 0$

$$\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \leq \int_0^t |\mu_s| ds \cdot \max_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|$$

Definíció

X korlátos változású (véges variációjú, $X \in FV$), ha minden t -re

$$V_t = V_t^X = \sup \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| < \infty \quad \text{egy valószínűséggel}$$

ahol a szuprémumot $[0, t]$ felosztásaira vesszük.

Állítás

X folytonos trajektóriájú, korlátos változású. Ekkor $[X] \equiv 0$.

- (t_i) $[0, t]$ felosztása

$$\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \leq \max_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \cdot \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \leq V_t^X \max_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|$$

- Trajektóriák folytonossága fontos. N Poisson folyamat. $N \in FV$. $[N] = N$.

Állítás

B Brown mozgás. Ekkor minden $t > 0$ -ra

$$\sup \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| = \infty$$

ahol a szuprémumot a $[0, t]$ (t_i) felosztásaira vesszük.

B folytonos trajektóriájú, ha $V_t^B < \infty$, akkor $[B]_t = 0$ lenne, de $[B]_t = t > 0$.

Állítás

$$\mathbb{P}(\text{van olyan } 0 \leq a < b, \text{ hogy } B \text{ totális variációja } [a, b] \text{ véges}) = 0.$$

Állítás

Ha X Itô folyamat, akkor X -nek létezik kvadratikus variációja és

$$[X]_t = X_t^2 - X_0^2 - 2 \int_0^t X_s dX_s$$

- $s \leq t \leq T$

$$(X_t - X_s)^2 = X_t^2 - X_s^2 - 2X_s(X_t - X_s)$$

$$[X]_t - [X]_s = X_t^2 - X_s^2 - 2 \int_s^t X_u dX_u$$

$$(X_t - X_s)^2 - ([X]_t - [X]_s) = 2 \int_0^T \mathbb{1}_{(s \leq u \leq t)} (X_u - X_s) dX_u$$

- (t_i) a $[0, t]$ felosztása $\sigma(u) = t_i$, ha $u \in [t_i, t_{i+1})$.

$$\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 - ([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i}) = 2 \int_0^t (X_u - X_{\sigma(u)}) dX_u \xrightarrow{p} 0 \quad \text{ha a felosztás végtelenül finomodik}$$

Tegyük fel, hogy X -nek létezik kvadratikus variációja

- $[X]_0 = 0$
- $s \leq t$ -re $[X]_s \leq [X]_t$
- Ha φ folytonos trajektóriájú, akkor

$$\int_0^t \varphi_s d[X]_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \varphi_{t_i^n} ([X]_{t_{i+1}^n} - [X]_{t_i^n}) \quad (\text{Riemann-Stieltjes integrál})$$

ahol (t_i^n) a $[0, t]$ végtelenül finomodó felosztássorozata.

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 függvény, X Itô folyamat. $t_i = t \wedge \frac{i}{n}$

$$\begin{aligned}
 f(X_t) - f(X_0) &= \sum_i f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}) = \\
 &= \sum_i f'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \quad \xrightarrow{p} \int_0^t f'(X_s) dX_s \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_i f''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \quad \xrightarrow{p} \frac{1}{2} \int f''(X_s) d[X]_s \quad (\text{Riemann-Stieltjes integrál}) \\
 &+ \sum_i r(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \quad \xrightarrow{p} 0
 \end{aligned}$$

ahol

$$r(x, y) = \int_0^1 \int_0^u f''(x + v(y - x)) - f''(x) dv du$$

- $$\sum_i f''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = \sum_i f''(X_{t_i})((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 - ([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i})) + \sum_i f''(X_{t_i})([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i})$$
- $t_i = t \wedge \frac{i}{n}, \sigma_n(u) = \frac{i}{n}, \text{ ha } \frac{i}{n} \leq u < \frac{i+1}{n}$

$$\begin{aligned} \sum_i f''(X_{t_i})((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 - ([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i})) &= \sum_i f''(X_{t_i}) 2 \int_0^t (X_u - X_{t_i}) \mathbb{1}_{(t_i \leq u < t_{i+1})} dX_u \\ &= 2 \int_0^t f''(X_{\sigma_n(u)})(X_u - X_{\sigma_n(u)}) dX_u \xrightarrow{p} 0 \end{aligned}$$

Ugyanis

$$\psi_u = \max_{v \leq u} |f''(X_v)| \cdot 2 \max_{v \leq u} |X_v|$$

folyamatra ψ folytonos trajektóriájú, adaptált, azaz $\psi \in \mathcal{L}(X)$ és dominálja az integrandust, ami pontonként nullához tart.

- $$\sum_i f''(X_{t_i})([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i}) \rightarrow \int_0^t f''(X_s) d[X]_s$$

Tétel

X Itô folyamat, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2$. Ekkor

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d[X]_s$$

Célok:

- $[X]$ csak X lokális martingál részétől függ.
- $[X]$ kiszámítása a

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

felírásból.

Definíció

X, Y folyamat, a $[X, Y]$ folyamat az X és Y zárójele, ha tetszőleges t esetén a $[0, t]$ minden végtelenül finomodó $(t_i^n)_{i=1}^{r_n}$ felosztás sorozatára

$$[X, Y]_t = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n})$$

$$[X, X] = [X]$$

Állítás

Ha $[X], [Y]$ létezik, és $[Y] = 0$, akkor $[X, Y] = 0$ és $[X + Y] = [X]$.

Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség.

$$|\sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n})|^2 \leq \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \sum_i (Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n})^2 \xrightarrow{p} 0$$

$$(\Delta(X + Y))^2 = (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + 2\Delta X \Delta Y$$

•

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s = V_t + M_t,$$

ahol

$$V_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds, \quad M_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$$

•

$$[V] \equiv 0, \quad \implies \quad [X] = [M]$$

Azaz Itô folyamat kvadratikus variációját a lokális martingál rész határozza meg, az idő integrál ahhoz nem járul hozzá.

Állítás (Parciális integrálás)

Ha X, Y Itô folyamatok, akkor létezik az $[X, Y]$ zárójel folyamat és

$$[X, Y]_t = (XY)_t - (XY)_0 - \int_0^t X_s dY_s - \int_0^t Y_s dX_s$$

- $s \leq t \leq T$

$$(X_t - X_s)(Y_t - Y_s) = (XY)_t - (XY)_s - X_s(Y_t - Y_s) - Y_s(X_t - X_s)$$

$$[X, Y]_t - [X, Y]_s = (XY)_t - (XY)_s - \int_s^t X_u dY_u - \int_s^t Y_u dX_u$$

$$(X_t - X_s)(Y_t - Y_s) - ([X, Y]_t - [X, Y]_s) = \int_0^T \mathbb{1}_{(s \leq u < t)} (X_u - X_s) dY_u + \int_0^T \mathbb{1}_{(s \leq u < t)} (Y_u - Y_s) dX_u$$

- (t_i) a $[0, t]$ felosztása $\sigma(u) = t_i$, ha $u \in [t_i, t_{i+1})$. Ha a felosztás végtelenül finomodik:

$$\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) - ([X, Y]_{t_{i+1}} - [X, Y]_{t_i}) = \int_0^t (X_u - X_{\sigma(u)}) dY_u + \int_0^t (Y_u - Y_{\sigma(u)}) dX_u \xrightarrow{p} 0$$

Tegyük fel, hogy X, Y Itô folyamat.

- $[X, Y]_0 = 0$
- $[X, Y]_s = \frac{1}{2}([X + Y] - [X] - [Y])$, azaz $[X, Y] \in FV$.
- Ha φ folytonos trajektóriájú, akkor

$$\int_0^t \varphi_s d[X, Y]_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \varphi_{t_i^n} ([X, Y]_{t_{i+1}^n} - [X, Y]_{t_i^n})$$

ahol (t_i^n) a $[0, t]$ végtelenül finomodó felosztássorozata.

Tétel

$X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ d -dimenziós Itô folyamat, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2$. Ekkor

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t (\partial_k f)(X_s) dX_s^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^d \int_0^t (\partial_{k,\ell} f)(X_s) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_s$$

Rövidebb jelölés

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \cdot d[X]_s$$

Itt $f'(X_s)$ vektor értékű, $f'(X_s) \cdot dX_s = \sum_k (\partial_k f)(X_s) dX_s^{(k)}$ a „skaláris szorzat”

Hasonlóan $f''(X_s)$, $[X]$ $d \times d$ mátrix értékű, és

$$[X]^{k,\ell} = [X^{(k)}, X^{(\ell)}], \quad f''(X_s) \cdot d[X]_s = \sum_{k,\ell=1}^d (\partial_{k,\ell} f)(X_s) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_s$$

Tétel

$X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ d -dimenziós Itô folyamat, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2$. Ekkor

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t (\partial_k f)(X_s) dX_s^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^d \int_0^t (\partial_{k, \ell} f)(X_s) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_s$$

Ha $d = 2$, $X_t^{(1)} = t$, $X_t^{(2)} = B_t$, akkor lényegében visszkapjuk a Brown mozgásra vonatkozó formulát.

$$[X]_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

- $t_i = \frac{i}{n} \wedge t$

-

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_i f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i})$$

-

$$g(u) = f(x + u(y - x)), \quad f(y) - f(x) = g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \int_0^1 \int_0^v g''(u) - g''(0) du dv$$

-

$$f(X_t) - f(X_s) = f'(X_s)(X_t - X_s) + \frac{1}{2}(X_t - X_s)^T f''(X_s)(X_t - X_s) + (X_t - X_s)^T r(X_s, X_t)(X_t - X_s)$$

•

$$\begin{aligned}
 f(X_t) - f(X_0) &= \sum_i f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}) \\
 &= \sum_k \sum_i \partial_k f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)}) && \xrightarrow{p} \sum_k \int_0^t (\partial_k f)(X_s) dX_s^{(k)} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \sum_i (X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)}) \partial_{k,\ell} f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)}) && \xrightarrow{p} \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \int_0^t (\partial_{k,\ell} f)(X_s) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_s \\
 &+ \sum_{k,\ell} \sum_i r_{k,\ell}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})(X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)})(X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)}) && \xrightarrow{p} 0
 \end{aligned}$$

- $t_i = t \wedge \frac{i}{n}, \sigma_n(u) = \frac{i}{n}, \text{ ha } \frac{i}{n} \leq u < \frac{i+1}{n}.$

-

$$\sum_i \partial_{k,\ell} f(X_{t_i}) ((X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)})(X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)}) - ([X^{(k)}, X^{(\ell)}]_{t_{i+1}} - [X^{(k)}, X^{(\ell)}]_{t_i}))$$

$$\int_0^t \partial_{k,\ell} f(X_{\sigma_n(u)}) (X_u^{(k)} - X_{\sigma_n(u)}^{(k)}) dX_u^{(\ell)} + \int_0^t \partial_{k,\ell} f(X_{\sigma_n(u)}) (X_u^{(\ell)} - X_{\sigma_n(u)}^{(\ell)}) dX_u^{(k)} \xrightarrow{p} 0$$

-

$$\sum_i \partial_{k,\ell} f(X_{t_i}) ([X^{(k)}, X^{(\ell)}]_{t_{i+1}} - [X^{(k)}, X^{(\ell)}]_{t_i}) \xrightarrow{p} \int_0^t \partial_{k,\ell} f(X_u) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_u$$

•

$$\sum_{k,\ell} \sum_i r_{k,\ell}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}}) (X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)}) (X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)})$$

ahol

$$r_{k,\ell}(x, y) = \int_0^1 \int_0^u \partial_{k,\ell} f(x + v(y - x)) - \partial_{k,\ell} f(x) dv du$$

•

$$\begin{aligned} & \left| \sum_i r_{k,\ell}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}}) (X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)}) (X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)}) \right|^2 \\ & \leq \max_i |r_{k,\ell}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})|^2 \sum_i (X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)})^2 \sum_i (X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)})^2 \xrightarrow{p} 0 \end{aligned}$$

Lemma

Ha X, Y Itô folyamatok és $X_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$, akkor

$$[X, Y]_t = \int_0^t \sigma_s d[B, Y]_s$$

Következmény

$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$. Ekkor

$$[X]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$$

$[X, Y]$, ha $X = I(\varphi)$ és φ egyszerű

- $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$, $X = I(\varphi)$.
- Y Itô folyamat

$$[X, Y]_t = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_j (X_{s_{j+1}^{(n)}} - X_{s_j^{(n)}})(Y_{s_{j+1}^{(n)}} - Y_{s_j^{(n)}})$$

ahol $(s_j^{(n)})$ a $[0, t]$ végtelenül finomodó felosztássorozata.

- Feltehető, hogy $t_r = t$ és $\{t_0, \dots, t_r\} \subset \{s_0^{(n)}, s_1^{(n)}, \dots\}$ minden n -re.
-

$$\begin{aligned} \sum_j (X_{s_{j+1}^{(n)}} - X_{s_j^{(n)}})(Y_{s_{j+1}^{(n)}} - Y_{s_j^{(n)}}) &= \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \sum_{t_i \leq s_j^{(n)} < t_{i+1}} (B_{s_{j+1}^{(n)}} - B_{s_j^{(n)}})(Y_{s_{j+1}^{(n)}} - Y_{s_j^{(n)}}) \\ &\xrightarrow{p} \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} ([B, Y]_{t_{i+1}} - [B, Y]_{t_i}) = \int_0^t \varphi_s d[B, Y]_s \end{aligned}$$

$[X, Y]$, ha $X = I(\varphi)$ és $\varphi \in \mathcal{S}$

- $\varphi^{(n)}$ egyszerű integrandusokból álló (gyorsan) közelítő sorozat φ -hez.
- $X^{(n)} = I(\varphi^{(n)})$, $X^{(n)} \rightarrow X$ egy valószínűséggel lokálisan egyenletesen.
-

$$\begin{aligned} [X^{(n)}, Y]_t &= \int_0^t \varphi_u^{(n)} d[B, Y]_u && \xrightarrow{p} \int_0^t \varphi_u d[B, Y]_u \quad \text{később} \\ &= (X^{(n)}Y)_t - \int_0^t X_u^{(n)} dY_u - \int_0^t Y_u \varphi_u^{(n)} dB_u && \xrightarrow{p} (XY)_t - \int_0^t X_u dY_u - \int_0^t Y_u \varphi_u dB_u = [X, Y]_t \end{aligned}$$

Ugyanis

$$\int_0^t Y_u^2 (\varphi_u - \varphi_u^{(n)})^2 du \leq \sup_{u \leq t} Y_u^2 \int_0^t (\varphi_u - \varphi_u^{(n)})^2 du \xrightarrow{p} 0$$

és

$$\sup_{u \leq t} |X_u^{(n)} - X_u| \rightarrow 0 \quad \text{miatt} \quad \int_0^t |X_u^{(n)} - X_u| |\mu_u^Y| + |X_u^{(n)} - X_u|^2 (\sigma_u^Y)^2 du \rightarrow 0$$