

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.03.13.

Tétel

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $C^{1,2}$ függvény. Ekkor

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t (\partial_1 f)(s, B_s) ds + \int_0^t (\partial_2 f)(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t (\partial_{22} f)(s, B_s) ds$$

- Taylor sorfejtés másodrendig:

$$\begin{aligned} f(t, y) - f(s, x) &= f(t, y) - f(s, y) + f(s, y) - f(s, x) \\ &= (\partial_1 f)(s^*, y)(t - s) + (\partial_2 f)(s, x)(y - x) + \left(\frac{1}{2}(\partial_{22} f)(s, x) + r(s, x, y)\right)(y - x)^2 \end{aligned}$$

- $t_i = t \wedge \frac{i}{n}$

$$\begin{aligned} f(t, B_t) - f(0, B_0) &= \sum_i f(t_{i+1}, B_{t_{i+1}}) - f(t_i, B_{t_i}) \\ &= \sum_i (\partial_1 f)(t_i^*, B_{t_{i+1}})(t_{i+1} - t_i) + \sum_i (\partial_2 f)(t_i, B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_i (\partial_{22} f)(t_i, B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 + \sum_i r(t_i, B_{t_i}, B_{t_{i+1}})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \end{aligned}$$

$t_i^{(n)} = t \wedge \frac{i}{n}, i \geq 0$. A hibatag:

$$\left| \sum_i r(t_i^{(n)}, B_{t_i^{(n)}}, B_{t_{i+1}^{(n)}}) (B_{t_{i+1}^{(n)}} - B_{t_i^{(n)}})^2 \right| \leq R_n Q_n, \quad R_n = \max_i |r(t_i^{(n)}, B_{t_i^{(n)}}, B_{t_{i+1}^{(n)}})|, \quad Q_n = \sum_i (B_{t_{i+1}^{(n)}} - B_{t_i^{(n)}})^2 \xrightarrow{p} t$$

- $R_n \partial_2^2 f$ és B trajektóriáinak folytonossága miatt egy valószínűséggel 0-hoz tart.
- Q_n -ről láttuk, a kvadrátikus variáció számításánál, hogy sztochasztikusan t -hez tart.
- Ebből $0 \leq R_n Q_n \xrightarrow{p} 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_n Q_n > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(|R_n Q_n| > \varepsilon, Q_n > t + 1) + \mathbb{P}(|R_n Q_n| > \varepsilon, Q_n \leq t + 1) \\ &\leq \mathbb{P}(Q_n > t + 1) + \mathbb{P}\left(R_n > \frac{\varepsilon}{1+t}\right) \rightarrow 0, \quad \text{minden } \varepsilon > 0 \text{ esetén.} \end{aligned}$$

- $|X_n| \leq R_n Q_n \xrightarrow{p} 0$ esetén $X_n \xrightarrow{p} 0$:

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(R_n Q_n > \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{minden } \varepsilon > 0 \text{ esetén.}$$

Egyszerűbb út: $X_n \xrightarrow{p} X$ pontosan akkor, ha minden $(X'_n) \subset (X_n)$ részsorozatnak létezik $(X''_n) \subset (X'_n)$ további részsorozata úgy, hogy $X''_n \rightarrow X$ egy valószínűséggel.

$$f \in C^{1,2}, t_i^n = t \wedge \frac{i}{n}.$$

$$\begin{aligned} f(t, B_t) - f(0, B_0) &= \sum_i f(t_{i+1}^n, B_{t_{i+1}^n}) - f(t_i^n, B_{t_i^n}) \\ &= \sum_i (\partial_1 f)(t_{n,i}^*, B_{t_{i+1}^n})(t_{i+1}^n - t_i^n) && \rightarrow \int_0^t (\partial_1 f)(s, B_s) ds \\ &\quad + \sum_i (\partial_2 f)(t_i^n, B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}) && \xrightarrow{p} \int_0^t (\partial_2 f)(s, B_s) dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_i (\partial_2^2 f)(t_i^n, B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 && \xrightarrow{p} \text{Itô korrekciós tag=?} \\ &\quad + \sum_i r(t_i^n, B_{t_i^n}, B_{t_{i+1}^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 && \xrightarrow{p} 0 \end{aligned}$$

- Az első lépésben $\varphi_s = (\partial_1 f)(s, B_s)$ folytonos trajektóriájú, $\varphi^{(n)} = \sum_i (\partial_1 f)(t_{n,i}^*, B_{t_{i+1}^n}) \mathbb{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n]}$
 $\varphi^{(n)} \rightarrow \varphi$ a $[0, t]$ -n egyenletesen (egy valószínűséggel).
- A második lépésben az integrál kiszámítására szolgáló formulát használtuk: $\varphi_s = (\partial_2 f)(s, B_s)$.

Állítás

φ folytonos trajektóriájú. Ekkor $\int_0^t \varphi_s ds = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i \varphi_{t_i^n} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2$.

$\varphi_s = (\partial_{22} f)(s, B_s)$ választással kapjuk, az Itô korrekciós tagot.

- $t_i^n = t \wedge \frac{i}{n}$ jelöléssel elég, hogy

$$\text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i \varphi_{t_i^n} \left((B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n) \right) = 0, \quad \text{mert} \quad \sum_i \varphi_{t_i^n} (t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow \int_0^t \varphi_s ds$$

- $0 \leq s \leq t$

$$(B_t - B_s)^2 = B_t^2 - B_s^2 - 2B_s(B_t - B_s)$$

$$t = B_t^2 - 2 \int_0^t B_u dB_u$$

$$s = B_s^2 - 2 \int_0^s B_u dB_u$$

$$(B_t - B_s)^2 - (t - s) = 2 \int_s^t B_u dB_u - 2B_s(B_t - B_s) = 2 \int_s^t (B_u - B_s) dB_u$$

- $\sigma_n(u) = i/n$, ha $\frac{i}{n} \leq u < \frac{i+1}{n}$, φ folytonos, adaptált.

$$\sum_i \varphi_{t_i} ((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)) = \sum_i \varphi_{t_i} 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} (B_u - B_{\sigma_n(u)}) dB_u = 2 \int_0^t \varphi_{\sigma_n(u)} (B_u - B_{\sigma_n(u)}) dB_u$$

- Szkorohod egyenlőtlenség alapján:

$$\int_0^t \varphi_{\sigma_n(u)}^2 (B_u - B_{\sigma_n(u)})^2 du \leq \max_{s \leq t} \varphi_s^2 \int_0^t (B_u - B_{\sigma_n(u)})^2 du \xrightarrow{p} 0 \implies \int_0^t \varphi_{\sigma_n(u)} (B_u - B_{\sigma_n(u)}) dB_u \xrightarrow{p} 0.$$

$\xi I(\varphi \mathbb{1}_{[s,\infty)}) = I(\xi \varphi \mathbb{1}_{[s,\infty)})$, ha $\xi \sim \mathcal{F}_s$. Részletesebben

$\xi \sim \mathcal{F}_s$ **korlátos**, $\varphi = \sum_i \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$ egyszerű és $\varphi = \varphi \mathbb{1}_{[s,\infty)}$.

- Feltehető, hogy $t_i \geq s$ minden i -re.
- $\xi \varphi$ is egyszerű

$$\xi I_t(\varphi) = \xi \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t \wedge t_{i+1}} - B_{t \wedge t_i}) = \sum_i (\xi \varphi)_{t_i} (B_{t \wedge t_{i+1}} - B_{t \wedge t_i}) = I(\xi \varphi)$$

$\varphi \in \mathcal{L}$, $\varphi = \varphi \mathbb{1}_{[s,\infty)}$

- $\varphi^{(n)}$ egyszerű, $\int_0^t (\varphi_s - \varphi_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{p} 0$, ekkor $\int_0^t (\xi \varphi_s - \xi \varphi_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{p} 0$ szintén teljesül.
- $\varphi^{(n)} = \varphi^{(n)} \mathbb{1}_{[s,\infty)}$ feltehető, mert ez is jó közelítő sorozat.
- $\xi I_t(\varphi) = \lim \xi I_t(\varphi^{(n)}) = \lim I_t(\xi \varphi^{(n)}) = I_t(\xi \varphi)$

$\xi \sim \mathcal{F}_s$ tetszőleges, $\varphi = \varphi \mathbb{1}_{[s,\infty)} \in \mathcal{L}$.

$$\int_0^t (\xi \mathbb{1}_{(|\xi| \leq K)} \varphi_u - \xi \varphi_u)^2 du \xrightarrow{p} 0 \quad \implies \quad I_t(\xi \varphi) = \lim_{K \rightarrow \infty} I_t(\xi \mathbb{1}_{(|\xi| \leq K)} \varphi) = \lim_{K \rightarrow \infty} \xi \mathbb{1}_{(|\xi| \leq K)} I_t(\varphi) = \xi I_t(\varphi)$$

$$f \in C^{1,2}, t_i^n = t \wedge \frac{i}{n}.$$

$$\begin{aligned} f(t, B_t) - f(0, B_0) &= \sum_i f(t_{i+1}^n, B_{t_{i+1}^n}) - f(t_i^n, B_{t_i^n}) \\ &= \sum_i (\partial_1 f)(t_{n,i}^*, B_{t_{i+1}^n})(t_{i+1}^n - t_i^n) && \rightarrow \int_0^t (\partial_1 f)(s, B_s) ds \\ &\quad + \sum_i (\partial_2 f)(t_i^n, B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}) && \xrightarrow{p} \int_0^t (\partial_2 f)(s, B_s) dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_i (\partial_2^2 f)(t_i^n, B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 && \xrightarrow{p} \frac{1}{2} \int_0^t (\partial_2^2 f)(s, B_s) ds \\ &\quad + \sum_i r(t_i^n, B_{t_i^n}, B_{t_{i+1}^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 && \xrightarrow{p} 0 \end{aligned}$$

Tétel

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, $f \in C^{1,2}$. Ekkor

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t (f_t + \frac{1}{2} f_{xx})(s, B_s) ds + \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s.$$

- $M_t = \exp\left\{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right\}.$

Ekkor $M_t = f(t, B_t)$, ahol $f(t, x) = e^{\lambda x - \lambda^2 t/2}.$

$$f_t = -\frac{\lambda^2}{2}f, \quad f_x = \lambda f, \quad f_{xx} = \lambda^2 f, \quad f_t + \frac{1}{2}f_{xx} = 0$$

$$\begin{aligned} M_t = f(t, B_t) &= f(0, B_0) + \int_0^t (f_t + \frac{1}{2}f_{xx})(s, B_s)ds + \int_0^t f_x(s, B_s)dB_s \\ &= 1 + \int_0^t \lambda M_s dB_s \end{aligned}$$

- $\lambda M \in \mathcal{S}$, ugyanis

$$\mathbb{E}(M_s^2) = \mathbb{E}(e^{2\lambda B_s - \lambda^2 s}) = e^{\lambda^2 s}, \quad \int_0^t \mathbb{E}(\lambda^2 M_s^2)ds < \infty, \quad \forall t \geq 0$$

- $M_t = \exp\left\{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right\}$, τ megállási idő.
- $M_t = 1 + I_t(\lambda M)$, így $M_{t \wedge \tau} = 1 + I_t(\lambda M \mathbb{1}_{[0, \tau]})$ és $((M_{t \wedge \tau})_{t \geq 0})$ martingál ($\lambda M \mathbb{1}_{[0, \tau]} \in \mathcal{S}$).
- $a > 0$, $\tau = m_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$

$$1 = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_{t \wedge \tau}) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{\lambda B_{t \wedge \tau} - \frac{\lambda^2}{2}t \wedge \tau\right\}\right)$$

- $\tau < \infty$ egy valószínűséggel

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left\{\lambda B_{t \wedge \tau} - \frac{\lambda^2}{2}t \wedge \tau\right\} = \exp\left\{\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2}\tau\right\} = \exp\left\{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}\tau\right\}$$

- $\lambda > 0 \implies M_{t \wedge \tau} \leq e^{a\lambda}$

$$e^{\lambda a} \mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau}\right) = \mathbb{E}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} M_{t \wedge \tau}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_{t \wedge \tau}) = 1.$$

$$\alpha = \frac{\lambda^2}{2}, \text{ azaz } \lambda = \pm\sqrt{2\alpha}, \lambda > 0$$

$$\mathbb{E}(e^{-\alpha\tau}) = \mathbb{E}(e^{-\alpha m_a}) = e^{-a\sqrt{2\alpha}}$$

- B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, $a > 0$ $X_t = B_t - at$. X negatív driftes Brown mozgás.
- $M_t = \exp\{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}$ martingál. M fejlődése:

$$M_t = 1 + \lambda \int_0^t M_s dB_s.$$

Láttuk, hogy $\lambda M \in \mathcal{S}$

- τ megállási idő $\mathcal{F}$ -ben. $N_t = M_{t \wedge \tau}$. Ekkor

$$N_t = 1 + I_{t \wedge \tau}(\lambda M) = 1 + I_t(\lambda M \mathbb{1}_{[0, \tau]}) = 1 + \int_0^t \lambda M_s \mathbb{1}_{(s \leq \tau)} dB_s$$

N az M megállítással kapott folyamat, N is négyzetesen integrálható martingál.

- Legyen $a, x > 0$, $\lambda = 2a$ és $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq x\}$. Ezzel a választással $M_t = \exp\{2aX_t\}$, $N_t = \exp\{2aX_{t \wedge \tau}\}$. $N_t \leq e^{2ax}$ és $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = 0$ miatt $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = e^{2ax} \mathbb{1}_{(\tau < \infty)}$

$$1 = \mathbb{E}(N_0) = \mathbb{E}(N_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} N_t\right) = e^{2ax} \mathbb{P}(\tau < \infty) = e^{2ax} \mathbb{P}\left(\sup_{t \geq 0} B_t - at \geq x\right)$$

$$\sup_{t \geq 0} B_t - at \sim \exp(2a).$$

- B Brown mozgás, $H_t = B_t - tB_1$, $t \in [0, 1]$. Ekkor H Brown híd és H független B_1 -től. (H folytonos trajektóriájú Gauss folyamat, nulla várható értékkel és $\text{cov}(H_s, H_t) = s \wedge t - st$ kovariancia függvénnyel.)

- $X_t = (1+t)H_{t/(1+t)}$, $t \geq 0$ folytonos trajektóriájú, nulla várható értékű Gauss folyamat, amire $0 \leq s \leq t$ -re

$$\text{cov}(X_s, X_t) = (1+s)(1+t) \text{cov}(H_{s/(1+s)}, H_{t/(1+t)}) = (1+s)(1+t) \left(\frac{s}{1+s} - \frac{s}{1+s} \frac{t}{1+t} \right) = s(1+t) - st = s$$

X Brown mozgás.

- $a, b > 0$

$$\begin{aligned} \{\exists s \in [0, 1], H_s \geq bs + (1-s)a\} &= \{\exists t \geq 0, (1+t)H_{t/(1+t)} \geq (1+t)((b-a)\frac{t}{1+t} + a)\} \\ &= \{\exists t \geq 0, X_t \geq (b-a)t + a(1+t)\} \\ &= \{\exists t \geq 0, X_t - bt \geq a\} \end{aligned}$$

•

$$\mathbb{P}(\exists s \in [0, 1], H_s \geq bs + a(1-s)) = \mathbb{P}\left(\sup_t X_t - bt \geq a\right) = e^{-2ba}$$

H Brown híd, $a, b > 0$. Ekkor $\mathbb{P}(\exists s \in [0, 1] H_s \geq bs + a(1-s)) = e^{-2ab}$.

- B Brown mozgás, $H_t = B_t - tB_1$, $t \in [0, 1]$. Ekkor H Brown híd és H független B_1 -től.
- $x > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{s \in [0, 1]} B_s \geq x\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{P}\left(\max_{s \in [0, 1]} H_s + sB_1 \geq x | B_1\right)\right) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(\exists s \in [0, 1], H_s \geq x - sy) |_{y=B_1})$$

•

$$\mathbb{P}(\exists s \in [0, 1], H_s \geq x - sy) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x - y \leq 0 \\ e^{-2x(x-y)} & \text{ha } x - y > 0 \end{cases}$$

•

$$e^{-2x(x-y)} = e^{2xy-2x^2} = e^{-\frac{1}{2}(-4xy+4x^2)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(y-2x)^2}}{e^{-\frac{1}{2}y^2}} = \frac{f_{Z+2x}(y)}{f_Z(y)}, \quad \text{ahol } Z \sim N(0, 1)$$

•

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{s \in [0, 1]} B_s \geq x\right) &= \mathbb{P}(B_1 > x) + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(B_1 \leq x)} \frac{f_{Z+2x}}{f_Z}(B_1)\right) \\ &= \mathbb{P}(B_1 > x) + \int_{-\infty}^x f_{Z+2x}(y) dy = \mathbb{P}(B_1 > x) + \mathbb{P}(B_1 + 2x \leq x) = \mathbb{P}(|B_1| \geq x) \end{aligned}$$

- Skála invariancia: Ha B Brown mozgás $X_t = \sqrt{T}B_{t/T}$, akkor X is az.

-

$$S_T \stackrel{d}{=} \max_{t \leq T} X_t = \sqrt{T} \max_{t \leq T} B_{t/T} = \sqrt{T} \max_{u \leq 1} B_u \stackrel{d}{=} \sqrt{T} |B_1| \stackrel{d}{=} |B_T|$$

Megjegyzés

Minden t -re S_t és $|B_t|$ azonos eloszlású, de az

$(S_t)_{t \geq 0}$ folyamat és az $(|B_t|)_{t \geq 0}$ folyamat nem azonos eloszlású.

S trajektóriái monoton nőnek, $t > 0$ -ra $S_t \neq 0$, míg az $|B|$ folyamatnak tetszőleges T -re $(0, T)$ -ben egy valószínűséggel van nullhelye.

- B Brown mozgás, $a > 0$, $\tau = m_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$
- $B_t \stackrel{d}{=} \sqrt{t}Z$, ahol $Z \sim N(0, 1)$

$$\mathbb{P}(\tau \leq t) = \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq u \leq t} B_u \geq a\right) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a) = \mathbb{P}(tZ^2 \geq a^2) = \mathbb{P}\left(\frac{a^2}{Z^2} \leq t\right)$$

- Összefoglalva, tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$m_a \stackrel{d}{=} \frac{a^2}{Z^2} \quad \text{ahol } Z \sim N(0, 1)$$

- $Z^2 \sim \Gamma_{1/2, 1/2}$, $\varphi(x) = a^2/x$,

$$f_{a^2/Z^2} = f_{\varphi(Z^2)} = (f_{Z^2} \circ \varphi^{-1}) \cdot |(\varphi^{-1})'|$$

- Itt

$$f_{Z^2}(t) = \mathbb{1}_{(t>0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-1/2} e^{-t/2}, \quad \text{és} \quad \varphi^{-1}(t) = a^2/t$$

- Kendall azonosság

$$f_{m_a}(t) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/(2t)} \mathbb{1}_{(t>0)} = \frac{|a|}{t} f_{B_t}(a) \mathbb{1}_{(t>0)}$$

- B Brown mozgás $d = \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}$.
- $\beta_t = B_{1+t} - B_1$ jelöléssel $(\beta_t)_{t \geq 0}$ a Markov tulajdonság alapján $\mathcal{F}_1$ -től független Brown mozgás, $m_a = \inf\{t \geq 0 : \beta_t = a\}$ a β szintelérési ideje.

$$\{d \leq 1 + t\} = \{m_{-B_1} \leq t\}$$

- Láttuk, hogy $m_a \stackrel{d}{=} \frac{a^2}{Z^2}$, ahol $Z \sim N(0, 1)$:

$$\mathbb{P}(d \leq 1 + t \mid \mathcal{F}_1) = \mathbb{P}(m_a \leq t) \big|_{a=-B_1} = \mathbb{P}\left(\frac{a^2}{Z^2} \leq t\right) \bigg|_{a=-B_1}$$

- X, Y független $N(0, 1)$ -ek

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y^2}{X^2} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\frac{Y^2}{X^2} \leq t \mid Y\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{P}\left(\frac{a^2}{X^2} \leq t\right) \bigg|_{a=Y}\right) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(m_a \leq t) \big|_{a=-B_1}) = \mathbb{P}(d \leq 1 + t)$$

- Összefoglalva

$$\inf\{t \geq 1 : B_t = 0\} \stackrel{d}{=} \frac{X^2 + Y^2}{X^2}, \quad \text{ahol } X, Y \text{ független } N(0, 1)$$

-

$$d = \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}, \quad g = \max\{t \in [0, 1] : B_t = 0\}$$

- X, Y független $N(0, 1)$ -ek $\varphi = \arg(X, Y) \sim U(0, 2\pi)$

$$g \stackrel{d}{=} \frac{1}{d} \stackrel{d}{=} \frac{X^2}{X^2 + Y^2} = \sin^2 \varphi$$

- $t \in [0, 1]$ -re

$$\mathbb{P}(g < t) = \mathbb{P}(|\sin \varphi| < \sqrt{t}) = \frac{4 \arcsin \sqrt{t}}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}$$

Az egy előtti utolsó nullhely arkusz szinusz eloszlású

Ez azonos a Béta($1/2, 1/2$) eloszlással, ugyanis a sűrűségfüggvénye a $t \in (0, 1)$ -re

$$f_g(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \arcsin \sqrt{t} = \frac{1}{\pi \sqrt{t(1-t)}}$$

- B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban.
- $f(t, x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right)$, ha $0 \leq t < 1$, ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvénye. $\varphi = \Phi'$ a sűrűségfüggvény, $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$.

$$f_t(t, x) = \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right) \cdot \frac{x}{2(1-t)^{3/2}},$$

$$f_x(t, x) = \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right) \cdot \frac{1}{(1-t)^{1/2}},$$

$$f_{xx}(t, x) = -\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right) \frac{x}{(1-t)^{1/2}} \cdot \left(\frac{1}{(1-t)^{1/2}}\right)^2$$

- $f_t + \frac{1}{2}f_{xx} = 0$ és $0 \leq t < 1$ esetén

$$\mathbb{P}(B_1 > 0 | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(B_1 - B_t + B_t > 0 | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}} > -\frac{B_1 - B_t}{\sqrt{1-t}}\right)\Big|_{x=B_t}$$

$$= \Phi\left(\frac{B_t}{\sqrt{1-t}}\right) = \Phi(B_0) + \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s.$$

- Ha $t \rightarrow 1$, akkor $\mathbb{P}(B_1 > 0 | \mathcal{F}_t) \rightarrow \mathbb{1}_{(B_1 > 0)}$. Azaz $M_t = \mathbb{P}(B_1 > 0 | \mathcal{F}_t)$ martingál $\mathcal{F}$ -ben, aminek a fejlődése

$$M_t = \frac{1}{2} + \int_0^t \psi_s dB_s, \quad \psi_s = \mathbb{1}_{(s < 1)} f_x(s, B_s)$$

- $M_t = \mathbb{P}(B_1 > 0 | \mathcal{F}_t)$ martingál $\mathcal{F}$ -ben, aminek a fejlődése

$$M_t = \frac{1}{2} + \int_0^{t \wedge 1} \psi_s dB_s, \quad \psi_s = \mathbb{1}_{(s < 1)} f_x(s, B_s), \quad f_x(s, x) = \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{1-s}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-s}}$$

- $\psi \in \mathcal{S}$ ugyanis $s < 1$ -re

$$\begin{aligned} 2\pi \mathbb{E}\left(\varphi^2\left(\frac{B_s}{\sqrt{1-s}}\right)\right) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\frac{x^2}{2(1-s)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{2}{1-s} + \frac{1}{s}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1+s}{s(1-s)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} dx = \left(\frac{s(1-s)}{1+s}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}}. \end{aligned}$$

$$2\pi \int_0^1 \mathbb{E}(\psi_s^2) ds = \int_0^1 \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{1-s} ds \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s}} ds = \left[-2\sqrt{1-s}\right]_{s=0}^{s=1} = 2.$$

- Általánosabban is igaz, ha X lokális martingál egy B Brown mozgás természetes filtrációjában, akkor $X = X_0 + I(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{L}$, ahol φ „lényegében” egyértelmű és ha X négyzetesen integrálható, akkor $\varphi \in \mathcal{S}$.

- $f(t, x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right)$, $0 \leq t < 1$. $f_t + \frac{1}{2}f_{xx} = 0$ a és f sima $(0, 1) \times \mathbb{R}$ halmazon.
- $f_{xt} + \frac{1}{2}f_{xxx} = \partial_x(f_t + \frac{1}{2}f_{xx}) = 0$

$$f_x(t, B_t) = f_x(0, B_0) + \int_0^t f_{xx}(s, B_s)dB_s$$

- $\psi_s = \mathbb{1}_{(s < 1)}f_{xx}(s, B_s)$. $\psi \in \mathcal{L}$:

$$f_{xx}(s, B_s) = -\varphi\left(\frac{B_s}{\sqrt{1-s}}\right) \cdot \frac{B_s}{2(1-s)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{B_s^2}{2(1-s)}\right\} \cdot \frac{B_s}{2(1-s)^{3/2}}$$

ψ a folytonos, adaptált (s, B_s) mérhető függvénye, azaz progresszíven mérhető és

$$\int_0^1 \psi_s^2 ds = c \cdot \int_0^1 \exp\left\{-\frac{B_s^2}{1-s}\right\} \cdot \frac{B_s^2}{(1-s)^3} ds \leq c \int_0^1 \min\left(c_1 \frac{1}{(1-s)^2}, c_2 \frac{1}{B_s^4}\right) ds < \infty \quad \text{ha } B_1 \neq 0$$

ahol $c_1 = \sup_{x>0} x e^{-x} = e^{-1}$ és $c_2 = \sup_{x>0} e^{-x} x^3 < \infty$.

Példa olyan lokális martingálra, ami nem martingál

- $f(t, x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-t}}\right)$, $0 \leq t < 1$. $f_t + \frac{1}{2}f_{xx} = 0$ a és f sima $(0, 1) \times \mathbb{R}$ halmazon.
- $f_{xt} + \frac{1}{2}f_{xxx} = \partial_x(f_t + \frac{1}{2}f_{xx}) = 0$

$$f_x(t, B_t) = f_x(0, B_0) + \int_0^t f_{xx}(s, B_s)dB_s, \quad \text{ha } t < 1$$

- $\psi_s = \mathbb{1}_{(s < 1)}f_{xx}(s, B_s)$. $\psi \in \mathcal{L}$.
- $X_t = f_x(0, B_0) + \int_0^t \psi_s dB_s$. X folytonos trajektóriájú lokális martingál.
- $t < 1$, $X_t = f_x(t, B_t)$.

$$\lim_{t \nearrow 1} f_x(t, B_t) = \lim_{t \nearrow 1} \varphi\left(\frac{B_t}{\sqrt{1-t}}\right) \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 0, \quad \text{a } \{B_1 \neq 0\} \text{ eseményen.}$$

- X nem lehet martingál, mert $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0) = 0 \neq X_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

- X Brown mozgás $\mathcal{F}$ -ben. $B_t = X_{1+t} - X_1$ az 1 pillanatban újra induló Brown mozgás, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{1+t}$.
- B Brown mozgás $\mathcal{G}$ -ben. $\varphi = X_1^{-2} \mathbb{1}_{[0, \infty)} \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$.
- $I(\varphi)$ lokális martingál.

$$I_t(\varphi) = X_1^{-2} B_t.$$

- $X_1 \sim \mathcal{G}_0$ és B_t függetlensége miatt:

$$\mathbb{E}(|I_t(\varphi)|) = \mathbb{E}(X_1^{-2} |B_t|) = \mathbb{E}(X_1^{-2}) \mathbb{E}(|B_t|) = \infty, \quad \text{minden } t > 0\text{-ra}$$

$I(\varphi)$ lokális martingál, de nem martingál, mert nem integrálható változókból áll.