

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.03.12.

Definíció

A φ folyamat egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha φ az $\mathcal{F}$ filtrációhoz adaptált, korlátos folyamat és létezik $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_r$ úgy, hogy $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$.

B Brown mozgás, φ egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban. $I_t(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$.

Jelölés: $\mathcal{E}$ az $\mathcal{F}$ filtrációban egyszerű integrandusok halmaza.

Állítás

$I_t : \mathcal{E} \rightarrow L^2(\Omega)$ jól definiált, lineáris és teljesíti az Itô izometriát:

$$\mathbb{E}(I_t^2(\varphi)) = \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds, \quad \text{vagy ugyanez más jelöléssel} \quad \|I_t(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times [0, t])}$$

$\varphi \in \mathcal{E}$ esetén az $I(\varphi) = (I_t(\varphi))_{t \geq 0}$ folyamat nullából induló, folytonos trajektóriájú, négyzetesen integrálható martingál.

Definíció

- $\varphi : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ progresszíven mérhető az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha minden $T > 0$ -ra a $(\omega, t) \mapsto \varphi_t(\omega) \mathbb{1}_{t \leq T}$ leképezés $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0, \infty))$ mérhető.
- $\mathcal{S} = \{ \varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds < \infty \}$
- $\varphi^{(n)}$ **közelítő sorozat** φ -hez, ha $\|\varphi - \varphi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0, t])} \rightarrow 0$ minden t -re.
- $\varphi \in \mathcal{S}$, $t \geq 0$. $I_t(\varphi) = \lim I_t(\varphi^{(n)})$, ahol $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez és a limesz L^2 -ben értendő.

Állítás (Integrál legfontosabb tulajdonságai)

- $\varphi \in \mathcal{S}$, $I_t(\varphi)$ jól definiált. $\varphi \mapsto I(\varphi)$ lineáris.
- $I(\varphi)$ definiálható, folytonos trajektóriájú folyamatként. Mindig ezt a változatot értjük integrál alatt.
- $I(\varphi)$ nullából induló, folytonos trajektóriájú, négyzetesen integrálható martingál. Itô izometria:

$$\|I_t(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times [0, t])}, \quad \text{más jelöléssel} \quad \mathbb{D}^2(I_t(\varphi)) = \mathbb{E}(I_t^2(\varphi)) = \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds$$

Definíció

$\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ valószínűségi változó megállási idő az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ minden $t \geq 0$ -ra.

Állítás

$\mathcal{F}$ filtráció, az X folytonos trajektóriájú folyamat adaptált az $\mathcal{F}$ filtrációhoz, H zárt halmaz, $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \in H\}$. Ekkor τ megállási idő.

Állítás

Ha τ megállási idő, akkor $\mathbb{1}_{[0, \tau]}$ és $\mathbb{1}_{[0, \tau)}$ progresszíven mérhető.

Megállási idők minimuma, maximuma, összege megállási idő.

Állítás

B Brown mozgás, τ megállási idő az $\mathcal{F}$ filtrációban, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{F})$. Ekkor $\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau]} \in \mathcal{S}$ és $I_{t \wedge \tau}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau]})$.
 Más jelölésekkel $\int_0^{t \wedge \tau} \varphi_s dB_s = \int_0^t \varphi_s \mathbb{1}_{(s \leq \tau)} dB_s$.

Lépések

1. τ véges értékkeszletű megállási idő.
2. τ tetszőleges.

$$\tau_n = \begin{cases} \frac{k+1}{2^n} & \text{ha } \frac{k}{2^n} \leq \tau < \frac{k+1}{2^n} \text{ és } k < n2^n \\ \infty & \text{ha } \tau \geq n \end{cases}, \quad \{\tau_n \leq t\} = \bigcup_{k=0}^{n2^n-1} \bigcup_{\ell} \left\{ \tau \leq \frac{k+1}{2^n} - \frac{1}{\ell}, \frac{k+1}{2^n} \leq t \right\}$$

τ_n megállási idő és $\tau_n \searrow \tau$ egy valószínűséggel, $I_{t \wedge \tau_n}(\varphi) \rightarrow I_{t \wedge \tau}(\varphi)$ a trajektóriák folytonossága miatt.

$$\int_0^t \mathbb{E}((\varphi_s \mathbb{1}_{(s \leq \tau_n)} - \varphi_s \mathbb{1}_{(s \leq \tau)})^2) ds = \mathbb{E} \left(\int_0^t \varphi_s^2 \mathbb{1}_{(\tau < s \leq \tau_n)} ds \right) \rightarrow 0 \implies I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}) \rightarrow I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau]}) \quad L^2\text{-ben.}$$

Ha a véges értékkeszletű τ_n -ekre már kiszámoltuk az állítást, akkor:

$$I_{t \wedge \tau}(\varphi) = \lim I_{t \wedge \tau_n}(\varphi) = \lim I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau]}).$$

Állítás

B Brown mozgás, τ véges értékészletű megállási idő, φ egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban. Ekkor $I_{t \wedge \tau}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau)})$.

- $\varphi \in \mathcal{E}$ egyszerű. $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$ valamely osztópont rendszerrel.
- τ értékészlete véges. Feltehető, hogy $\{t_0 < t_1 < \dots < t_r < \infty\}$ része.
- $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau)}$ egyszerű integrandus, hiszen

$$(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau)})(t) = \varphi(t) \mathbb{1}_{(t < \tau)} = \left(\sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{(t \in [t_i, t_{i+1}))} \right) \mathbb{1}_{(t < \tau)} = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{(\tau > t_i)} \mathbb{1}_{(t \in [t_i, t_{i+1}))}$$

•

$$I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau)}) = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{(\tau > t_i)} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}) = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge \tau \wedge t} - B_{t_i \wedge \tau \wedge t}) = I_{t \wedge \tau}(\varphi).$$

Állítás

B Brown mozgás, τ véges értékészletű megállási idő, $\varphi \in \mathcal{S}$ az $\mathcal{F}$ filtrációban. Ekkor $\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau]} \in \mathcal{S}$ és $I_{t \wedge \tau}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau]})$.

- $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat.
- τ értékészlete véges. Feltehető, hogy $\{t_0 < t_1 < \dots < t_r < t_{r+1} = \infty\}$ része.
- $\varphi^{(n)} \mathbb{1}_{[0,\tau]}$ közelítő sorozat $\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau]} \in \mathcal{S}$ -hez:

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \left(\varphi_s \mathbb{1}_{(s \leq \tau)} - \varphi_s^{(n)} \mathbb{1}_{(s < \tau)} \right)^2 ds \right) \leq \int_0^t \mathbb{E} \left(\left(\varphi_s - \varphi_s^{(n)} \right)^2 \right) ds \rightarrow 0$$

•

$$I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau]}) = \lim I_t(\varphi^{(n)} \mathbb{1}_{[0,\tau]}) = \lim I_{t \wedge \tau}(\varphi^{(n)}) = I_{t \wedge \tau}(\varphi)$$

mert $I_{t \wedge t_i}(\varphi^{(n)}) \rightarrow I_{t \wedge t_i}(\varphi)$ $i = 0, \dots, r+1$ és $I_{t \wedge \tau} = \sum_i \mathbb{1}_{(\tau = t_i)} I_{t \wedge t_i}$.

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban. Minden fogalom $(\mathcal{S}, \text{megállási idő}, I)$ ezekre vonatkozik.

Definíció

$\mathcal{L} = \{\varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \varphi_s^2 ds < \infty \text{ egy valószínűséggel}\}$

(τ_n) **lokalizáló megállási idő sorozat** φ -hez, ha $\tau_n \rightarrow \infty$ egy valószínűséggel és $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}$, azaz $\int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2 \mathbb{1}_{(s \leq \tau_n)}) ds < \infty$ minden t és n esetén.

Állítás (Indoklás később)

$\varphi \in \mathcal{L}$ pontosan akkor ha létezik hozzá lokalizáló sorozat.

Ha $\varphi \in \mathcal{L}$, (τ_n) lokalizáló sorozat φ -hez, akkor $I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$ egy valószínűséggel konvergens és a limesz nem függ a lokalizáló sorozat választásától.

Definíció (Itô integrál)

$\varphi \in \mathcal{L}$ esetén $I_t(\varphi) = \lim I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$, ahol (τ_n) tetszőleges lokalizáló sorozat φ -hez.

Állítás

$\varphi \in \mathcal{L}$. Ekkor $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \varphi_s^2 ds \geq n\}$ lokalizáló megállási idő sorozat φ -hez, azaz $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}$.

- $X_t = \int_0^t \varphi_s^2 ds$ folytonos trajektóriájú, adaptált φ progresszív mérhetősége miatt.
- τ_n az X folytonos trajektóriájú adaptált folyamatra a $[n, \infty)$ zárt halmazba történő első belépés ideje. Láttuk, hogy ezek megállási idők.
- $\tau_n \leq \tau_{n+1}$, amiből $\lim \tau_n$ létezik.
- $\int_0^t \varphi_s^2 ds < \infty$ egy valószínűséggel $\implies \lim \tau_n > t$ egy valószínűséggel minden t -re, amiből $\mathbb{P}(\lim \tau_n = \infty) = 1$.

•

$$\int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2 \mathbb{1}_{(s \leq \tau_n)}) ds = \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge \tau_n} \varphi_s^2 ds\right) = \mathbb{E}(X_{t \wedge \tau_n}) \leq n.$$

Megfordítás is igaz, de arra nincs szükségünk.

$$\lim I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$$

Emlékeztető. $\varphi \in \mathcal{S}$, τ megállási idő. Ekkor $I_{t \wedge \tau}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$.

Állítás

Ha $\varphi \in \mathcal{L}$, (τ_n) lokalizáló megállási idő sorozat φ -hez. Ekkor $I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$ egy valószínűséggel konvergens.

- Általában $\tau_n \nearrow \infty$. Itt ezt nem tesszük fel.
- τ, ρ megállási idők, $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]}, \varphi \mathbb{1}_{[0, \rho]} \in \mathcal{S}$, ekkor

$$I_{t \wedge \rho}(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]}) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \rho \wedge \tau]}) = I_{t \wedge \tau}(\varphi \mathbb{1}_{[0, \rho]})$$

- Az $\{\inf_{k \geq n} \tau_k \geq t\}$ eseményen

$$I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) = I_{t \wedge \tau_{n+1}}(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) = I_{t \wedge \tau_n}(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_{n+1}]}) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_{n+1}]}) \dots$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$ létezik az $\cup_n \{\inf_{k \geq n} \tau_k \geq t\}$ majdnem biztos eseményen.
- Valójában azt számoltuk ki, hogy rögzített t -re $I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$ egy valószínűséggel kvázi konstans sorozat.

$\lim I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$ nem függ a (τ_n) lokalizáló sorozattól

Állítás

Ha $\varphi \in \mathcal{L}$, (τ_n) , (ρ_n) lokalizáló megállási idő sorozatok φ -hez. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \rho_n]}).$$

- $\tau_1, \rho_1, \tau_2, \rho_2, \dots$ is lokalizáló sorozat.
- $I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_1]}), I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \rho_1]}), I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_2]}), I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \rho_2]}), \dots$ egy valószínűséggel konvergens.
- Minden részsorozatnak ugyanaz a limesze: $\lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \rho_n]}).$

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban. Minden fogalom $(\mathcal{S}, \text{megállási idő}, I)$ ezekre vonatkozik.

Definíció

$\mathcal{L} = \{\varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \varphi_s^2 ds < \infty \text{ egy valószínűséggel}\}$

(τ_n) **lokalizáló megállási idő sorozat** φ -hez, ha $\tau_n \rightarrow \infty$ egy valószínűséggel és $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}$.

$\varphi \in \mathcal{L}$ esetén $I_t(\varphi) = \lim I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$, ahol (τ_n) tetszőleges lokalizáló sorozat φ -hez.

- $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ és I_t az integrál kiterjesztése. $\varphi \in \mathcal{S}, \tau_n = \infty$ választás.
- I_t lineáris $\mathcal{L}$ -en. $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$. τ_n, ρ_n lokalizáló sorozattal. Ekkor $\tau_n \wedge \rho_n$ lokalizáló sorozat az összeghez és φ, ψ -hez is

$$(\varphi + c\psi) \mathbb{1}_{[0, \tau_n \wedge \rho_n]} = (\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) \mathbb{1}_{[0, \rho_n]} + c(\psi \mathbb{1}_{[0, \rho_n]}) \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}.$$

I linearitását használva $\mathcal{S}$ -en:

$$I_t(\varphi + c\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_t((\varphi + c\psi) \mathbb{1}_{[0, \tau_n \wedge \rho_n]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n \wedge \rho_n]} + c\psi \mathbb{1}_{[0, \tau_n \wedge \rho_n]}) = I_t(\varphi) + cI_t(\psi)$$

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban. Minden fogalom ($\mathcal{S}$, megállási idő, I) ezekre vonatkozik.

Definíció

$\mathcal{L} = \{\varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \varphi_s^2 ds < \infty \text{ egy valószínűséggel}\}$

(τ_n) **lokalizáló megállási idő sorozat** φ -hez, ha $\tau_n \rightarrow \infty$ egy valószínűséggel és $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}$.

$\varphi \in \mathcal{L}$ esetén $I_t(\varphi) = \lim I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$, ahol (τ_n) tetszőleges lokalizáló sorozat φ -hez.

- $\varphi \in \mathcal{L}$. Ekkor $I(\varphi)$ (választható) folytonos trajektóriájú folyamatnak.
Ha (τ_n) lokalizáló sorozat φ -hez, akkor $I_{t \wedge \tau_n}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$, azaz τ_n -ig a trajektóriák egy valószínűséggel folytonosak. $\exists \Omega'_n$ esemény, $\mathbb{P}(\Omega'_n) = 1$ és $\omega \in \Omega'_n$ -re $t \mapsto I_{t \wedge \tau_n}(\varphi)(\omega)$ folytonos.
A $\{\lim \tau_n = \infty\} \cap \bigcap_n \Omega'_n$ majdnem biztos eseményen $t \mapsto I_t(\varphi)(\omega)$ folytonos.
- $\varphi \in \mathcal{L}$ és τ megállási idő estén $I_{t \wedge \tau}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$.
Ugyanis ha τ_n lokalizáló sorozat φ -hez, akkor lokalizáló sorozat $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]}$ -hez is és

$$I_{t \wedge \tau}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{t \wedge \tau}(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]} \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$$

Definíció

$\mathcal{F}$ filtráció.

Az X folyamat **folytonos trajektóriájú lokális martingál** $\mathcal{F}$ -ben, ha létezik megállási idők végtelenbe tartó (τ_n) sorozata úgy, hogy X^{τ_n} folytonos trajektóriájú martingál $\mathcal{F}$ -ben minden n -re, ahol $(X^\tau)_t = X_{t \wedge \tau} \mathbb{1}_{(\tau > 0)}$ a megállított folyamat.

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, a fogalmak erre a párra vonatkoznak.

Állítás

$\varphi \in \mathcal{L}$. Ekkor $I(\varphi)$ folytonos trajektóriájú lokális martingál.

- Ha τ megállási idő, akkor $(I^\tau(\varphi))_t = I_{t \wedge \tau}(\varphi)$, mert $I_0(\varphi) = 0$.
- $\varphi \in \mathcal{L}$ létezik lokalizáló sorozat, azaz $\tau_n \rightarrow \infty$ és $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}$.
 $I^{\tau_n}(\varphi)$ folytonos trajektóriájú négyzetesen integrálható martingál.

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban. Minden fogalom ($\mathcal{S}$, megállási idő, I) ezekre vonatkozik.

Definíció

$\mathcal{L} = \{\varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \varphi_s^2 ds < \infty \text{ egy valószínűséggel}\}$

(τ_n) **lokalizáló megállási idő sorozat** φ -hez, ha $\tau_n \rightarrow \infty$ egy valószínűséggel és $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}$, azaz $\int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2 \mathbb{1}_{(s \leq \tau_n)}) ds < \infty$ minden t és n esetén.

Definíció (Itô integrál)

$\varphi \in \mathcal{L}$ esetén $I_t(\varphi) = \lim I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$, ahol (τ_n) tetszőleges lokalizáló sorozat φ -hez.

- I jól definiált kiterjeszti az integrál $\mathcal{S}$ -ről $\mathcal{L}$ -re.
- $\mathcal{L} \ni \varphi \mapsto I_t(\varphi)$ lineáris, $I_0(\varphi) = 0$.
- $\varphi \in \mathcal{S}$ esetén $I(\varphi)$ folytonos trajektóriájú, négyzetesen integrálható martingál (Itô izometria).
- $\varphi \in \mathcal{L}$ esetén $I(\varphi)$ folytonos trajektóriájú, lokális martingál, azaz $I(\varphi)$ nem feltétlenül martingál, de pl. tetszőleges (τ_n) lokalizáló sorozatra $I^{\tau_n}(\varphi)$ már az.
- $\varphi \in \mathcal{L}$, τ megállási idő esetén $I^\tau(\varphi) = I(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$, azaz egy egy valószínűségű eseményen $I_{t \wedge \tau}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$ minden $t \geq 0$ -ra.

Emlékeztető. $X_n \xrightarrow{p} X$, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0$.

Állítás

$$X_n \xrightarrow{p} X \iff \mathbb{E}(1 \wedge |X_n - X|) \rightarrow 0.$$

- $\Rightarrow$: $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(1 \wedge |X_n - X|) &\leq \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(|X_n - X| \leq \varepsilon)} 1 \wedge |X_n - X|) + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(|X_n - X| > \varepsilon)} 1 \wedge |X_n - X|) \\ &\leq \varepsilon + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < 2\varepsilon, \quad \text{ha } X_n \xrightarrow{p} X \text{ és } n \text{ elég nagy.}\end{aligned}$$

- $\Leftarrow$: $\varepsilon > 0$. Markov egyenlőtlenségből

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(1 \wedge |X_n - X| > \varepsilon \wedge \tfrac{1}{2}) \leq \frac{1}{\varepsilon \wedge \frac{1}{2}} \mathbb{E}(1 \wedge |X_n - X|)$$

Következmény

$$X_n \xrightarrow{p} X \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(1 \wedge |X_n - X|) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(1 \wedge (X_n - X)^2) = 0$$

$$\mathbb{E}(1 \wedge (X_n - X)^2) \leq \mathbb{E}(1 \wedge |X_n - X|) \leq \mathbb{E}^{1/2}(1 \wedge |X_n - X|^2)$$

Állítás

$$\varphi \in \mathcal{L}$$

$$\mathbb{E}(1 \wedge I_t^2(\varphi)) \leq 2\mathbb{E}\left(1 \wedge \int_0^t \varphi_s^2 ds\right)$$

Az egyenlőtlenség jelentése: **Ha** $\varphi^{(n)} \in \mathcal{L}$ **és** $\int_0^t (\varphi_s^{(n)})^2 ds \xrightarrow{p} 0$ **akkor** $I_t(\varphi^{(n)}) \xrightarrow{p} 0$.

Következmény

$\varphi^{(n)}, \varphi \in \mathcal{L}$. Ha $\int_0^t (\varphi_s^{(n)} - \varphi_s)^2 ds \xrightarrow{p} 0$, akkor $I_t(\varphi^{(n)}) \xrightarrow{p} I_t(\varphi)$

Következmény (Dominált konvergencia tétel)

$\varphi^{(n)}, \varphi \in \mathcal{L}$. Ha $\varphi_s^{(n)} \rightarrow \varphi_s \forall s$ -re és $\int_0^t \sup_n (\varphi_s^{(n)})^2 ds < \infty$ egy valószínűséggel, akkor $I_t(\varphi^{(n)}) \xrightarrow{p} I_t(\varphi)$.

$$\int_0^t (\varphi_s^{(n)} - \varphi_s)^2 ds \rightarrow 0, \quad \text{mert } 4 \sup_n (\varphi_s^{(n)})^2 \text{ integrálható majoráns}$$

Állítás

$\varphi \in \mathcal{L}$

$$\mathbb{E}(1 \wedge I_t^2(\varphi)) \leq 2\mathbb{E}\left(1 \wedge \int_0^t \varphi_s^2 ds\right) \quad \text{és} \quad \mathbb{E}\left(1 \wedge \sup_{s \leq t} I_s^2(\varphi)\right) \leq 5\mathbb{E}\left(1 \wedge \int_0^t \varphi_s^2 ds\right)$$

- $\tau = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \varphi_s^2 ds \geq 1\}$. τ megállási idő.

- $I_{t \wedge \tau}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$, ahol $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]} \in \mathcal{S}$.

-

$$1 \wedge I_t^2(\varphi) \leq \mathbb{1}_{(\tau < t)} + I_t^2(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]}) \implies \mathbb{E}(1 \wedge I_t^2(\varphi)) \leq \mathbb{P}(\tau \leq t) + \mathbb{E}(I_t^2(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]}))$$

-

$$\mathbb{P}(\tau \leq t) = \mathbb{P}\left(\int_0^t \varphi_s^2 ds \geq 1\right) \leq \mathbb{E}\left(1 \wedge \int_0^t \varphi_s^2 ds\right)$$

- Itô izometriával

$$\mathbb{E}(I_t^2(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \varphi_s^2 \mathbb{1}_{(s \leq \tau)} ds\right) = \mathbb{E}\left(1 \wedge \int_0^t \varphi_s^2 ds\right)$$

- A sup-os változat a Doob momentum egyenlőtlenséget használja az izometria helyett.

Tétel

φ folytonos trajektóriájú, adaptált. Ekkor $\varphi \in \mathcal{L}$ és

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{\frac{i}{n}} (B_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - B_{t \wedge \frac{i}{n}}).$$

- $\varphi^{(n,k)} = \sum_{i=0}^{nk-1} \varphi_{\frac{i}{n}} \mathbb{1}_{(|\varphi_{\frac{i}{n}}| \leq k)} \mathbb{1}_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})}$. Minden n, k -ra $\varphi^{(n,k)}$ egyszerű.
- $\varphi^{(n)} = \sum_i \varphi_{\frac{i}{n}} \mathbb{1}_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})}$ nem egyszerű, de $\varphi \in \mathcal{L}$, és $\varphi_s^{(n,k)} \rightarrow \varphi_s^{(n)}$ minden s -re, továbbá $\int_0^t \sup_k (\varphi_s^{(n,k)})^2 ds \leq t \sup_{s \in [0,t]} \varphi_s^2 < \infty$.
- Hasonlóan $\varphi_s^{(n)} \rightarrow \varphi_s$ a trajektóriák folytonossága miatt és $\int_0^t \sup_n (\varphi_s^{(n)})^2 ds \leq t \sup_{s \in [0,t]} \varphi_s^2 < \infty$.
- Dominált konvergencia tétel szerint:

$$I_t(\varphi) = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi^{(n)}), \quad I_t(\varphi^{(n)}) = \text{p-lim}_{k \rightarrow \infty} I_t(\varphi^{(n,k)})$$

•

$$\text{p-lim}_{k \rightarrow \infty} I_t(\varphi^{(n,k)}) = \text{p-lim}_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{nk-1} \varphi_{\frac{i}{n}} \mathbb{1}_{(|\varphi_{\frac{i}{n}}| \leq k)} (B_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - B_{t \wedge \frac{i}{n}}) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{\frac{i}{n}} (B_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - B_{t \wedge \frac{i}{n}})$$

$$\int_0^t B_s dB_s$$

- B folytonos trajektóriájú, adaptált. $B \in \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. $\int_0^t \mathbb{E}(B_s^2) ds = \int_0^t s ds = t^2/2 < \infty$

•

$$\int_0^t B_s dB_s = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i B_{\frac{i}{n}} (B_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - B_{t \wedge \frac{i}{n}}).$$

- Csak azok a tagok nem nullák, ahol $\frac{i}{n} < t$. $t_i = t \wedge \frac{i}{n}$ jelöléssel

$$2 \sum_i B_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_i (B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2 - (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2) = B_t^2 - B_0^2 - \sum_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

ahol a $2a(b-a) = b^2 - a^2 - (a-b)^2$ összefüggést használtuk.

- $Q_n = \sum_i (B_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - B_{t \wedge \frac{i}{n}})^2$. Tudjuk, hogy Q_n sztochasztikusan konvergál, mert $\frac{1}{2}(B_t^2 - B_0^2 - Q_n) \xrightarrow{p} \int_0^t B_s dB_s$. Csak az a kérdés mihez.

Definíció

X folyamat kvadratikus variációja a $[X]$ folyamat, ha tetszőleges $t \geq 0$ esetén a $[0, t]$ intervallum minden végtelenül finomodó $(\pi_n = \{t_0^n = 0 < t_1^n < \dots < t_r^n = t\})$ felosztás sorozatára

$$[X]_t = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\pi_n}, \quad \text{ahol} \quad Q_{\pi_n} = \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2$$

- B Brown mozgás. $\pi = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r = t\}$ a $[0, t]$ intervallum felosztása.

$$\mathbb{E}(Q_\pi) = \sum_i (t_{i+1} - t_i) = t,$$

$$\mathbb{D}^2(Q_\pi) = \sum \mathbb{D}^2((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2) = \sum c(t_{i+1} - t_i)^2 \leq ct \max_i (t_{i+1} - t_i) = ct \cdot (\pi \text{ finomsága}).$$

Ugyanis a növekmények függetlenek és $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \stackrel{d}{=} (t_{i+1} - t_i)Z^2$, $Z \sim N(0, 1)$. $c = \mathbb{D}^2(Z^2) = 2$ HF.

- Ha π_n a $[0, t]$ végtelenül finomodó felosztás sorozata, akkor $\mathbb{E}(|Q_{\pi_n} - t|^2) = \mathbb{D}^2(Q_{\pi_n}) \rightarrow 0$, azaz

$$Q_{\pi_n} \rightarrow t \quad L^2\text{-ben} \quad \implies \quad Q_{\pi_n} \xrightarrow{p} t \quad \implies \quad [B]_t = t$$

Brown mozgásnak létezik kvadratikus variációja és az az „idő”.

$$\int B_s dB_s$$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t B_s dB_s &= \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_i B_{\frac{i}{n}} (B_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - B_{t \wedge \frac{i}{n}}) \\ &= B_t^2 - B_0^2 - \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i (B_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - B_{t \wedge \frac{i}{n}})^2 = B_t^2 - t. \end{aligned}$$

- $\varphi = 2B \in \mathcal{S}$, $I(\varphi)$ négyzetesen integrálható martingál.
- A sztochasztikus integrál kiszámítására szolgáló formulában:

$$\int_0^t \varphi_s dB_s = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i \varphi_{\frac{i}{n}} (B_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - B_{t \wedge \frac{i}{n}}), \quad \text{ha } \varphi \text{ folytonos adaptált,}$$

fontos hogy φ értékét a felosztás darab kezdőpontjában nézzük.

HF.

$$\begin{aligned} \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_i B_{\frac{i+1}{n}} (B_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - B_{t \wedge \frac{i}{n}}) &= B_t^2 + t \\ \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_i B_{\frac{i+1/2}{n}} (B_{t \wedge \frac{i+1}{n}} - B_{t \wedge \frac{i}{n}}) &= B_t^2 \end{aligned}$$

Tétel

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $C^{1,2}$ függvény, azaz $\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_{22} f$ létezik és folytonos. Ekkor

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t (\partial_1 f)(s, B_s) ds + \int_0^t (\partial_2 f)(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t (\partial_{22} f)(s, B_s) ds$$

- Szokásos jelölés még $f_t = \partial_1 f$, $f_x = \partial_2 f$, $f_{xx} = \partial_{22} f$.
- A két idő integrált szokás összevonni:

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t (f_t + \frac{1}{2} f_{xx})(s, B_s) ds + \int_0^t f_x(s, B_s) dB_s$$

- $Lf = f_t + \frac{1}{2} f_{xx}$ lineáris operátor a $C^{1,2}$ függvénytéren. Ezt a $f(t, B_t)_{t \geq 0}$ folyamat **generátorának** is hívják.
- Speciális eset, ha $f(t, x) = f(x)$, azaz f nem függ az időtől. Ekkor

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

Tétel

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $C^{1,2}$ függvény. Ekkor

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t (\partial_1 f)(s, B_s) ds + \int_0^t (\partial_2 f)(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t (\partial_{22} f)(s, B_s) ds$$

- Taylor sorfejtés másodrendig:

$$\begin{aligned} f(t, y) - f(s, x) &= f(t, y) - f(s, y) + f(s, y) - f(s, x) \\ &= (\partial_1 f)(s^*, y)(t - s) + (\partial_2 f)(s, x)(y - x) + \left(\frac{1}{2}(\partial_{22} f)(s, x) + r(s, x, y)\right)(y - x)^2 \end{aligned}$$

- $t_i = t \wedge \frac{i}{n}$

$$\begin{aligned} f(t, B_t) - f(0, B_0) &= \sum_i f(t_{i+1}, B_{t_{i+1}}) - f(t_i, B_{t_i}) \\ &= \sum_i (\partial_1 f)(t_i^*, B_{t_{i+1}})(t_{i+1} - t_i) + \sum_i (\partial_2 f)(t_i, B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_i (\partial_{22} f)(t_i, B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 + \sum_i r(t_i, B_{t_i}, B_{t_{i+1}})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \end{aligned}$$

- $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $C^{1,2}$ függvény. Legyen

$$w(T, K, \delta) = \sup_{s \leq T, |x|, |y| \leq K, |y-x| \leq \delta} |(\partial_2^2 f)(s, y) - (\partial_2^2 f)(s, x)|$$

Rögzített $T, K > 0$ mellett $\lim_{\delta \rightarrow 0} w(T, K, \delta) = 0$.

•

$$f(t, y) - f(s, x) = f(t, y) - f(s, y) + f(s, y) - f(s, x)$$

- $g(u) = f(s, x + (y - x)u)$, $g(0) = f(s, x)$, $g(1) = f(s, y)$

$$g(1) - g(0) = g'(0) + \int_0^1 g'(u) - g'(0) du = g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) + \int_0^1 \int_0^u (g''(v) - g''(0)) dv du$$

- $g'(0) = (\partial_2 f)(s, x)(y - x)$, $g''(u) = (\partial_2^2 f)(s, x + u(y - x))(y - x)^2$

$$f(t, y) - f(s, x) = f(t, y) - f(s, y) + f(s, y) - f(s, x)$$

$$= (\partial_1 f)(t^*, y) \cdot (t - s) + (\partial_2 f)(s, x) \cdot (y - x) + \left\{ \frac{1}{2} (\partial_2^2 f)(s, x) + r(s, x, y) \right\} \cdot (y - x)^2$$

ahol $t^* \in (s, t)$ és ha $s \leq T$, $|x|, |y| \leq K$, $|x - y| \leq \delta$

$$|r(s, x, y)| = \left| \int_0^1 \int_0^u (\partial_2^2 f)(s, x + v(y - x)) - (\partial_2^2 f)(s, x) dv du \right| \leq \frac{1}{2} w(T, K, \delta)$$

$$2|r(s, x, y)| \leq w(T, K, \delta) = \sup_{s \leq T, |x|, |y| \leq K, |y-x| \leq \delta} |(\partial_2^2 f)(s, y) - (\partial_2^2 f)(s, x)|$$

ha $s \leq T$, $|x|, |y| \leq K$ és $|x - y| \leq \delta$. Ha $f \in C^{1,2}$, akkor rögzített $T, K > 0$ mellett $\lim_{\delta \rightarrow 0} w(T, K, \delta) = 0$.

Állítás

B Brown mozgás, $t_i^n = t \wedge \frac{i}{n}$. Ekkor $p\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i r(t_i^n, B_{t_i^n}, B_{t_{i+1}^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 = 0$.

•

$$X_n = \sum_i r(t_i^n, B_{t_i^n}, B_{t_{i+1}^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2, \quad |X_n| \leq R_n Q_n$$

ahol $R_n = \max_i |r(t_i^n, B_{t_i^n}, B_{t_{i+1}^n})|$ és $Q_n = \sum_i (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 \xrightarrow{p} t$.

•

$$R_n = \max_i |r(t_i^n, B_{t_i^n}, B_{t_{i+1}^n})| \leq \frac{1}{2} w(t, \max_{s \leq t} |B_s|, \delta(t, B, \frac{1}{n})), \quad \delta(t, B, \frac{1}{n}) = \max_{0 \leq u \leq v \leq (u + \frac{1}{n}) \wedge t} |B_v - B_u|.$$

$\delta(t, B, \frac{1}{n}) \rightarrow 0$ egy valószínűséggel, hiszen B trajektóriái a $[0, t]$ -en egyenletesen folytonosak.

• $R_n \xrightarrow{p} 0, Q_n \xrightarrow{p} t \implies R_n Q_n \xrightarrow{p} 0. \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(R_n Q_n > \varepsilon) \rightarrow 0$, amiből $X_n \xrightarrow{p} 0$

Állítás

$X_n \xrightarrow{p} X, Y_n \xrightarrow{p} Y$. Ekkor $X_n + Y_n \rightarrow X + Y$ és $X_n Y_n \rightarrow XY$.

- Összeg:

$$\mathbb{P}(|X_n + Y_n - (X + Y)| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \tfrac{1}{2}\varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n - Y| > \tfrac{1}{2}\varepsilon) \rightarrow 0$$

- Szorzat: $X = Y = 0$

$$\mathbb{P}(|X_n Y_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n| > 1) \rightarrow 0$$

- $X = 0, Y$ tetszőleges. Ekkor

$$\mathbb{P}(|X_n Y| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|Y| > K) + \mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{\varepsilon}{K}\right) \implies$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n Y| > \varepsilon) \leq \inf_K \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Y| > K) + \mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{\varepsilon}{K}\right) = \inf_K \mathbb{P}(|Y| > K) = 0$$

azaz $X_n Y \xrightarrow{p} 0$ és $X_n Y_n = X_n Y + X_n (Y_n - Y) \xrightarrow{p} 0$.

•

$$\text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} X_n Y_n = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} (X_n - X) Y_n + \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} X (Y_n - Y) + XY = XY$$