

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.03.06.

Definíció

$\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ valószínűségi változó megállási idő az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ minden $t \geq 0$ -ra.

Állítás

$\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ valószínűségi változó.

Ha τ megállási idő, akkor $\mathbb{1}_{[0, \tau]}$ és $\mathbb{1}_{[0, \tau)}$ progresszíven mérhető.

Ha $\mathbb{1}_{[0, \tau)}$ progresszíven mérhető, akkor τ megállási idő.

Ha a filtráció jobbról folytonos és $\mathbb{1}_{[0, \tau]}$ progresszíven mérhető, akkor τ megállási idő.

Nekünk csak az kell, hogy ha τ megállási idő, akkor $\mathbb{1}_{[0, \tau]}$ progresszíven mérhető. Az állítás azt mondja, hogy $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau)}$ pontosan akkor progresszíven mérhető minden $\varphi \in \mathcal{S}$ -re, ha τ megállási idő.

- $X_t = (t - \tau) \vee 0$ definícióval, X folytonos trajektóriájú és

$$\{X_t < c\} = \begin{cases} \emptyset & c \leq 0 \\ \{\tau > t - c\} = \{\tau \leq t - c\}^c \in \mathcal{F}_{(t-c) \vee 0} \subset \mathcal{F}_t & c > 0 \end{cases} \implies X \text{ adaptált.}$$

- X progresszíven mérhető, $\mathbb{1}_{[0, \tau]} = g(X)$ is az, ahol $g(x) = \mathbb{1}_{(x=0)}$.

Állítás

B Brown mozgás, τ megállási idő az $\mathcal{F}$ filtrációban, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{F})$. Ekkor $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]} \in \mathcal{S}$ és $I_{t \wedge \tau}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$.
 Más jelölésekkel $\int_0^{t \wedge \tau} \varphi_s dB_s = \int_0^t \varphi_s \mathbb{1}_{(s \leq \tau)} dB_s$.

Lépések

1. τ véges értékkeszletű megállási idő.
2. τ tetszőleges.

$$\tau_n = \begin{cases} \frac{k+1}{2^n} & \text{ha } \frac{k}{2^n} \leq \tau < \frac{k+1}{2^n} \text{ és } k < n2^n \\ \infty & \text{ha } \tau \geq n \end{cases}, \quad \{\tau_n \leq t\} = \bigcup_{k=0}^{n2^n-1} \bigcup_{\ell} \left\{ \tau \leq \frac{k+1}{2^n} - \frac{1}{\ell}, \frac{k+1}{2^n} \leq t \right\}$$

τ_n megállási idő és $\tau_n \searrow \tau$ egy valószínűséggel, $I_{t \wedge \tau_n}(\varphi) \rightarrow I_{t \wedge \tau}(\varphi)$ a trajektóriák folytonossága miatt.

$$\int_0^t \mathbb{E}((\varphi_s \mathbb{1}_{(s \leq \tau_n)} - \varphi_s \mathbb{1}_{(s \leq \tau)})^2) ds = \mathbb{E} \left(\int_0^t \varphi_s^2 \mathbb{1}_{(\tau < s \leq \tau_n)} ds \right) \rightarrow 0 \implies I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) \rightarrow I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]}) \quad L^2\text{-ben.}$$

$$I_{t \wedge \tau}(\varphi) = \lim I_{t \wedge \tau_n}(\varphi) = \lim I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]}).$$

Állítás

B Brown mozgás, τ véges értékészletű megállási idő, φ egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban. Ekkor $I_{t \wedge \tau}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau)})$.

- $\varphi \in \mathcal{E}$ egyszerű. $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$ valamely osztópont rendszerrel.
- τ értékészlete véges. Feltehető, hogy $\{t_0 < t_1 < \dots < t_r < \infty\}$ része.
- $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau)}$ egyszerű integrandus, hiszen

$$(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau)})(t) = \varphi(t) \mathbb{1}_{(t < \tau)} = \left(\sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{(t \in [t_i, t_{i+1}))} \right) \mathbb{1}_{(t < \tau)} = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{(\tau > t_i)} \mathbb{1}_{(t \in [t_i, t_{i+1}))}$$

•

$$I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau)}) = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{(\tau > t_i)} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}) = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge \tau \wedge t} - B_{t_i \wedge \tau \wedge t}) = I_{t \wedge \tau}(\varphi).$$

Állítás

B Brown mozgás, τ véges értékészletű megállási idő, $\varphi \in \mathcal{S}$ az $\mathcal{F}$ filtrációban. Ekkor $\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau]} \in \mathcal{S}$ és $I_{t \wedge \tau}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau]})$.

- $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat.
- τ értékészlete véges. Feltehető, hogy $\{t_0 < t_1 < \dots < t_r < t_{r+1} = \infty\}$ része.
- $\varphi^{(n)} \mathbb{1}_{[0,\tau]}$ közelítő sorozat $\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau]} \in \mathcal{S}$ -hez:

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \left(\varphi_s \mathbb{1}_{(s \leq \tau)} - \varphi_s^{(n)} \mathbb{1}_{(s < \tau)} \right)^2 ds \right) \leq \int_0^t \mathbb{E} \left(\left(\varphi_s - \varphi_s^{(n)} \right)^2 \right) ds \rightarrow 0$$

•

$$I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0,\tau]}) = \lim I_t(\varphi^{(n)} \mathbb{1}_{[0,\tau]}) = \lim I_{t \wedge \tau}(\varphi^{(n)}) = I_{t \wedge \tau}(\varphi)$$

mert $I_{t \wedge t_i}(\varphi^{(n)}) \rightarrow I_{t \wedge t_i}(\varphi)$ $i = 0, \dots, r+1$ és $I_{t \wedge \tau} = \sum_i \mathbb{1}_{(\tau = t_i)} I_{t \wedge t_i}$.

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban. Minden fogalom $(\mathcal{S}, \text{megállási idő}, I)$ ezekre vonatkozik.

Definíció

$\mathcal{L} = \{\varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \varphi_s^2 ds < \infty \text{ egy valószínűséggel}\}$

(τ_n) **lokalizáló megállási idő sorozat** φ -hez, ha $\tau_n \rightarrow \infty$ egy valószínűséggel és $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}$, azaz $\int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2 \mathbb{1}_{(s \leq \tau_n)}) ds < \infty$ minden t és n esetén.

Állítás (Indoklás később)

$\varphi \in \mathcal{L}$ pontosan akkor ha létezik hozzá lokalizáló sorozat.

Ha $\varphi \in \mathcal{L}$, (τ_n) lokalizáló sorozat φ -hez, akkor $I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$ egy valószínűséggel konvergens és a limesz nem függ a lokalizáló sorozat választásától.

Definíció (Itô integrál)

$\varphi \in \mathcal{L}$ esetén $I_t(\varphi) = \lim I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$, ahol (τ_n) tetszőleges lokalizáló sorozat φ -hez.

Állítás

$\varphi \in \mathcal{L}$. Ekkor $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \varphi_s^2 ds \geq n\}$ lokalizáló megállási idő sorozat φ -hez, azaz $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}$.

- $X_t = \int_0^t \varphi_s^2 ds$ folytonos trajektóriájú, adaptált φ progresszív mérhetősége miatt.
- τ_n az X folytonos trajektóriájú adaptált folyamatra a $[n, \infty)$ zárt halmazba történő első belépés ideje. Láttuk, hogy ezek megállási idők.
- $\tau_n \leq \tau_{n+1}$, amiből $\lim \tau_n$ létezik.
- $\int_0^t \varphi_s^2 ds < \infty$ egy valószínűséggel $\implies \lim \tau_n > t$ egy valószínűséggel minden t -re, amiből $\mathbb{P}(\lim \tau_n = \infty) = 1$.

•

$$\int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2 \mathbb{1}_{(s \leq \tau_n)}) ds = \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge \tau_n} \varphi_s^2 ds\right) = \mathbb{E}(X_{t \wedge \tau_n}) \leq n.$$

Megfordítás is igaz, de arra nincs szükségünk.

$$\lim I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$$

Emlékeztető. $\varphi \in \mathcal{S}$, τ megállási idő. Ekkor $I_{t \wedge \tau}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$.

Állítás

Ha $\varphi \in \mathcal{L}$, (τ_n) lokalizáló megállási idő sorozat φ -hez. Ekkor $I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$ egy valószínűséggel konvergens.

- Általában $\tau_n \nearrow \infty$. Itt ezt nem tesszük fel.
- τ, ρ megállási idők, $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]}, \varphi \mathbb{1}_{[0, \rho]} \in \mathcal{S}$, ekkor

$$I_{t \wedge \rho}(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]}) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \rho \wedge \tau]}) = I_{t \wedge \tau}(\varphi \mathbb{1}_{[0, \rho]})$$

- Az $\{\inf_{k \geq n} \tau_k \geq t\}$ eseményen

$$I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) = I_{t \wedge \tau_{n+1}}(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) = I_{t \wedge \tau_n}(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_{n+1}]}) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_{n+1}]}) \dots$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$ létezik az $\cup_n \{\inf_{k \geq n} \tau_k \geq t\}$ majdnem biztos eseményen.
- Valójában azt számoltuk ki, hogy rögzített t -re $I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$ egy valószínűséggel kvázi konstans sorozat.

$\lim I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$ nem függ a (τ_n) lokalizáló sorozattól

Állítás

Ha $\varphi \in \mathcal{L}$, (τ_n) , (ρ_n) lokalizáló megállási idő sorozatok φ -hez. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \rho_n]}).$$

- $\tau_1, \rho_1, \tau_2, \rho_2, \dots$ is lokalizáló sorozat.
- $I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_1]}), I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \rho_1]}), I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_2]}), I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \rho_2]}), \dots$ egy valószínűséggel konvergens.
- Minden részsorozatnak ugyanaz a limesze: $\lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \rho_n]}).$

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban. Minden fogalom $(\mathcal{S}, \text{megállási idő}, I)$ ezekre vonatkozik.

Definíció

$\mathcal{L} = \{\varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \varphi_s^2 ds < \infty \text{ egy valószínűséggel}\}$

(τ_n) **lokalizáló megállási idő sorozat** φ -hez, ha $\tau_n \rightarrow \infty$ egy valószínűséggel és $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}$.

$\varphi \in \mathcal{L}$ esetén $I_t(\varphi) = \lim I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$, ahol (τ_n) tetszőleges lokalizáló sorozat φ -hez.

- $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ és I_t az integrál kiterjesztése. $\varphi \in \mathcal{S}, \tau_n = \infty$ választás.
- I_t lineáris $\mathcal{L}$ -en. $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$. τ_n, ρ_n lokalizáló sorozattal. Ekkor $\tau_n \wedge \rho_n$ lokalizáló sorozat az összeghez és φ, ψ -hez is

$$(\varphi + c\psi) \mathbb{1}_{[0, \tau_n \wedge \rho_n]} = (\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}) \mathbb{1}_{[0, \rho_n]} + c(\psi \mathbb{1}_{[0, \rho_n]}) \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}.$$

I linearitását használva $\mathcal{S}$ -en:

$$I_t(\varphi + c\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_t((\varphi + c\psi) \mathbb{1}_{[0, \tau_n \wedge \rho_n]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n \wedge \rho_n]} + cI_t(\psi \mathbb{1}_{[0, \tau_n \wedge \rho_n]})) = I_t(\varphi) + cI_t(\psi)$$

Definíció

$\mathcal{F}$ filtráció.

Az X folyamat **folytonos trajektóriájú lokális martingál** $\mathcal{F}$ -ben, ha létezik megállási idők végtelenbe tartó (τ_n) sorozata úgy, hogy X^{τ_n} folytonos trajektóriájú martingál $\mathcal{F}$ -ben minden n -re, ahol $(X^\tau)_t = X_{t \wedge \tau} \mathbb{1}_{(\tau > 0)}$ a megállított folyamat.

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, a fogalmak erre a párra vonatkoznak.

Állítás

$\varphi \in \mathcal{L}$. Ekkor $I(\varphi)$ folytonos trajektóriájú lokális martingál.

- Ha τ megállási idő, akkor $(I^\tau(\varphi))_t = I_{t \wedge \tau}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$, mert $I_0(\varphi) = 0$.
- $\varphi \in \mathcal{L}$ létezik lokalizáló sorozat, azaz $\tau_n \rightarrow \infty$ és $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}$.
 $I^{\tau_n}(\varphi)$ folytonos trajektóriájú négyzetesen integrálható martingál.

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban. Minden fogalom ($\mathcal{S}$, megállási idő, I) ezekre vonatkozik.

Definíció

$\mathcal{L} = \{\varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \varphi_s^2 ds < \infty \text{ egy valószínűséggel}\}$

(τ_n) **lokalizáló megállási idő sorozat** φ -hez, ha $\tau_n \rightarrow \infty$ egy valószínűséggel és $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}$, azaz $\int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2 \mathbb{1}_{(s \leq \tau_n)}) ds < \infty$ minden t és n esetén.

Definíció (Itô integrál)

$\varphi \in \mathcal{L}$ esetén $I_t(\varphi) = \lim I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$, ahol (τ_n) tetszőleges lokalizáló sorozat φ -hez.

- I jól definiált kiterjeszti az integrál $\mathcal{S}$ -ről $\mathcal{L}$ -re.
- $\mathcal{L} \ni \varphi \mapsto I_t(\varphi)$ lineáris, $I_0(\varphi) = 0$.
- $\varphi \in \mathcal{S}$ esetén $I(\varphi)$ folytonos trajektóriájú, négyzetesen integrálható martingál (Itô izometria).
- $\varphi \in \mathcal{L}$ esetén $I(\varphi)$ folytonos trajektóriájú, lokális martingál, azaz $I(\varphi)$ nem feltétlenül martingál, de pl. tetszőleges (τ_n) lokalizáló sorozatra $I^{\tau_n}(\varphi)$ már az.
- $\varphi \in \mathcal{L}$, τ megállási idő esetén $I^\tau(\varphi) = I(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$, azaz egy egy valószínűségű eseményen $I_{t \wedge \tau}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$ minden $t \geq 0$ -ra.