

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.02.27.

Egy folyamat növekményei ortogonálisak, ha egymásba nem nyúló intervallumokon vett növekmények szorzata nulla várható értékű.

Állítás

M nullából induló, négyzetesen integrálható martingál. Ekkor M növekményei ortogonálisak, és tetszőleges $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r = t$ osztópont rendszerre:

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \sum_{i=0}^{r-1} \mathbb{E}((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2)$$

- $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r = t$. $0 \leq i < j < r$, ekkor $t_i < t_{i+1} \leq t_j$ és

$$\mathbb{E}((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j}) = (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\mathbb{E}((M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j}) = 0$$

M martingál tulajdonsága miatt.

- $\Delta_i = M_{t_{i+1}} - M_{t_i}$ jelöléssel, $M_t = M_t - M_0 = \sum_i \Delta_i$

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_i \Delta_i\right)^2\right) = \sum_i \mathbb{E}(\Delta_i^2) + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E}(\Delta_i \Delta_j) = \sum_i \mathbb{E}(\Delta_i^2).$$

Állítás

M nullából induló, négyzetesen integrálható martingál. Ekkor M növekményei ortogonálisak, és tetszőleges $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r = t$ osztópont rendszerre $\mathbb{E}(M_t^2) = \sum_{i=0}^{r-1} \mathbb{E}((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2)$

Következmény

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, φ egyszerű integrandus, azaz korlátos, $\mathcal{F}$ -adaptált

$\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$ alkalmas $\{t_i\}$ osztópontokkal. $I_t(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$. Ekkor $\mathbb{E}(I_t^2(\varphi)) = \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds$.

- $I(\varphi)$ négyzetesen integrálható martingál.
- Feltehető, hogy t a φ felírásában használt osztópont rendszer eleme: $t = t_k$.

$$I_t(\varphi) = I_{t_k}(\varphi) = \sum_{i:i < k} \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}), \quad \Delta_i = I_{t_{i+1}}(\varphi) - I_{t_i}(\varphi) = \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

- Az állítás szerint

$$\mathbb{E}(I_t^2(\varphi)) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}(\Delta_i^2), \quad \text{ahol} \quad \mathbb{E}(\Delta_i^2) = \mathbb{E}(\varphi_{t_i}^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2) = \mathbb{E}(\varphi_{t_i}^2) (t_{i+1} - t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds$$

Kihasználtuk, hogy $\varphi_{t_i} \sim \mathcal{F}_{t_i} \perp B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ és $\varphi_s = \varphi_{t_i}$, ha $s \in [t_i, t_{i+1})$.

Definíció

A φ folyamat egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha φ az $\mathcal{F}$ filtrációhoz adaptált, korlátos folyamat és létezik $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_r$ úgy, hogy $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$.

B Brown mozgás, φ egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban. $I_t(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$.

Jelölés: $\mathcal{E}$ az $\mathcal{F}$ filtrációban egyszerű integrandusok halmaza.

Állítás

$I_t : \mathcal{E} \rightarrow L^2(\Omega)$ jól definiált, lineáris és teljesíti az Itô izometriát:

$$\mathbb{E}(I_t^2(\varphi)) = \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds, \quad \text{vagy ugyanez más jelöléssel} \quad \|I_t(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times [0, t])}$$

$\varphi \in \mathcal{E}$ esetén az $I(\varphi) = (I_t(\varphi))_{t \geq 0}$ folyamat nullából induló, folytonos trajektóriájú, négyzetesen integrálható martingál.

Emlékeztető. $L^2(\Omega)$ teljes, azaz ha $(X_n) \subset L^2(\Omega)$ Cauchy sorozat ($\lim_{m,n \rightarrow \infty} \mathbb{E}((X_n - X_m)^2) = 0$), akkor létezik L^2 -beli limesze, azaz létezik $X \in L^2(\Omega)$, amire $\mathbb{E}((X_n - X)^2) \rightarrow 0$.

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban. B és $\mathcal{F}$ adott, minden fogalom ezekre vonatkozik. $\mathcal{E}$ az egyszerű integrandusok halmaza.

Definíció

$\mathcal{S} = \{ \varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds < \infty \}$

$\varphi^{(n)}$ **közelítő sorozat** φ -hez ha $\|\varphi - \varphi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0,t])} \rightarrow 0$ minden t -re.

Állítás (Indoklás később)

Ha $\varphi \in \mathcal{S}$, akkor létezik $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez.

Ha $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez, $t \geq 0$, akkor az $I_t(\varphi^{(n)})$ integrálok $L^2(\Omega)$ -ban konvergálnak és a limesz nem függ a közelítő sorozat választásától.

Definíció

$\varphi \in \mathcal{S}$, $t \geq 0$.

$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s = \lim I_t(\varphi^{(n)})$, ahol $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez és a limesz L^2 -ben értendő.

Definíció

$\varphi^{(n)}$ **közelítő sorozat** φ -hez ha $\|\varphi - \varphi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0,t])} \rightarrow 0$ minden t -re.

Állítás

Ha $\varphi \in \mathcal{S}$, akkor létezik $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez.

Ha $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez, $t \geq 0$, akkor az $I_t(\varphi^{(n)})$ integrálok $L^2(\Omega)$ -ban konvergálnak és a limesz nem függ a közelítő sorozat választásától.

- A közelítő sorozat létezése, technikai jellegű lemma. Most fogadjuk el, a félév vége felé visszatérünk rá.
- Ha $\varphi^{(n)}$ közelítő sorozat és $t \geq 0$, akkor $\varphi^{(n)}$ Cauchy az $L^2(\Omega \times [0,t])$ térben, hiszen

$$\|\varphi^{(n)} - \varphi^{(m)}\|_{L^2(\Omega \times [0,t])} \leq \|\varphi - \varphi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0,t])} + \|\varphi - \varphi^{(m)}\|_{L^2(\Omega \times [0,t])} \rightarrow 0 \quad \text{ha } n, m \rightarrow \infty.$$

- $\|I_t(\varphi^{(n)}) - I_t(\varphi^{(m)})\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi^{(n)} - \varphi^{(m)}\|_{L^2(\Omega \times [0,t])}$ az Itô izometria miatt $\implies I_t(\varphi^{(n)})$ is Cauchy az $L^2(\Omega)$ térben. $\implies I_t(\varphi^{(n)})$ közelítő integrálok L^2 -ben konvergálnak.
- Ha $\varphi^{(n)}$ és $\psi^{(n)}$ is közelítő sorozat φ -hez, akkor

$$\|\varphi^{(n)} - \psi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0,t])} \leq \|\varphi - \varphi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0,t])} + \|\varphi - \psi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0,t])} \rightarrow 0 \quad \text{ha } n \rightarrow \infty$$

és az izometria miatt $I_t(\varphi^{(n)}) - I_t(\psi^{(n)}) \rightarrow 0$ L^2 -ben. Ebből $\lim I_t(\varphi^{(n)}) = \lim I_t(\psi^{(n)})$.

Definíció

$\mathcal{S} = \{\varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds < \infty\}$

$\varphi^{(n)}$ **közelítő sorozat** φ -hez ha $\|\varphi - \varphi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0, t])} \rightarrow 0$ minden t -re.

$\varphi \in \mathcal{S}$, $t \geq 0$. $I_t(\varphi) = \lim I_t(\varphi^{(n)})$, ahol $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez és a limesz L^2 -ben értendő.

Egyszerű integrandusok integráljának tulajdonságai öröklődnek $\mathcal{S}$ -re:

- $\mathcal{S} \ni \varphi \mapsto I_t(\varphi)$ lineáris. $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, $\varphi^{(n)}$ ill. $\psi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozatokkal. $\varphi^{(n)} + \psi^{(n)}$ jó közelítő sorozat $\varphi + \psi$ -hez.

$$I_t(\varphi + \psi) = \lim I_t(\varphi^{(n)} + \psi^{(n)}) = \lim I_t(\varphi^{(n)}) + I_t(\psi^{(n)}) = I_t(\varphi) + I_t(\psi).$$

Hasonlóan $I_t(c\varphi) = \lim I_t(c\varphi^{(n)}) = \lim cI_t(\varphi^{(n)}) = cI_t(\varphi)$.

- $I_0(\varphi) = \lim I_0(\varphi^{(n)}) = 0$, azaz $I(\varphi)$ nullából induló folyamat.

Definíció

$\mathcal{S} = \{\varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds < \infty\}$

$\varphi^{(n)}$ **közelítő sorozat** φ -hez ha $\|\varphi - \varphi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0, t])} \rightarrow 0$ minden t -re.

$\varphi \in \mathcal{S}$, $t \geq 0$. $I_t(\varphi) = \lim I_t(\varphi^{(n)})$, ahol $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez és a limesz L^2 -ben értendő.

Egyszerű integrandusok integráljának tulajdonságai öröklődnek $\mathcal{S}$ -re:

- L^2 konvergenciából az L^2 norma konvergenciája következik:

$$\|I_t(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} = \lim \|I_t(\varphi^{(n)})\|_{L^2(\Omega)} = \lim \|\varphi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0, t])} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times [0, t])}$$

Azaz $\varphi \in \mathcal{S}$ -re teljesül az Itô izometria.

- Feltételes várható érték képzés L^2 -ben folytonos:

$$\mathbb{E}(I_t(\varphi) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\lim I_t(\varphi^{(n)}) \mid \mathcal{F}_s) = \lim \mathbb{E}(I_t(\varphi^{(n)}) \mid \mathcal{F}_s) = \lim I_s(\varphi^{(n)}) = I_s(\varphi).$$

Azaz $I(\varphi)$ martingál.

Összefoglalva: $\varphi \in \mathcal{S}$ -re $I(\varphi)$ nullából induló, négyzetesen integrálható martingál, ami az Itô izometriát teljesíti. Mi a helyzet a trajektóriák folytonosságával?

- Ha $X_n \rightarrow X$ $L^2(\Omega)$ -ban és $\mathbb{P}(X' = X) = 1$, akkor $X_n \rightarrow X'$ is teljesül (szintén L^2 -ben). Az L^2 -beli limesz csak nullmértékű eseménytől eltekintve egyértelmű.
- $\varphi \in \mathcal{S}$ -re $I_t(\varphi) = L^2 - \lim I_t(\varphi^{(n)})$ minden t -re.
- Kontinuum sok nulla valószínűségű esemény lefedheti Ω -t.

Állítás (Indoklás később)

$\varphi \in \mathcal{S}$, $(\varphi^{(n)}) \subset \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez. Ha $\|\varphi^{(n)} - \varphi\|_{L^2(\Omega \times [0, n])} \leq 2^{-n}$, akkor egy majdnem biztos Ω' eseményen $I_t(\varphi^{(n)})$ konvergens minden t -re, és Ω' -n $I(\varphi) = (\lim I_t(\varphi^{(n)}))_{t \geq 0}$ trajektóriái folytonosak.

Következmény

$\varphi \in \mathcal{S}$, $I(\varphi)$ definiálható folytonos trajektóriájú, adaptált folyamatként.

- $\tilde{\varphi}^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez.

$\|\varphi - \tilde{\varphi}^{(k)}\|_{L^2(\Omega \times [0, n])} \rightarrow 0, \implies$ létezik k_n , hogy $k = k_n$ -re a baloldal legfeljebb 2^{-n} .

- $\varphi^{(n)} = \tilde{\varphi}^{(k_n)}$ teljesíti az állítás feltételét.
- $I(\varphi)$ kiszámítható $I(\varphi^{(n)})$ közelítő integrálok segítségével, $I_t(\varphi) = \lim I_t(\varphi^{(n)}) \sim \mathcal{F}_t$ egy valószínűségű limesz folytonos trajektóriájú folyamatot definiál.

Állítás

$f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ folytonos függvények. Ha $\sum_n 1 \wedge \sup_{0 \leq t \leq n} |f_{n+1}(t) - f_n(t)| < \infty$, akkor $f_n(t)$ minden $t \geq 0$ pontban konvergens és ha $f(t) = \lim_n f_n(t)$ a limesz függvény, akkor f folytonos.

- $a_n = \sup_{0 \leq t \leq n} |f_{n+1}(t) - f_n(t)|$, a feltétel szerint $\sum 1 \wedge a_n < \infty$. Ekkor $1 \wedge a_n \rightarrow 0$ és $\sum a_n < \infty$.
- $t \leq n \leq m$ -re

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \sum_{k \geq n} |f_{k+1}(t) - f_k(t)| \leq \sum_{k \geq n} a_k \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty$$

Azaz $(f_n(t))$ Cauchy sorozat és így konvergens.

- $f(t) = \lim f_n(t)$. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \sum_{k \geq n} |f_{k+1}(t) - f_k(t)| \leq \sum_{k \geq n} a_k \quad \text{ha } t \leq n.$$

A konvergencia t -ben lokálisan egyenletes.

- $t_0 \in [0, \infty)$, $\varepsilon > 0$. Elég nagy n -re $\sup_{t \leq t_0+1} |f(t) - f_n(t)| < \varepsilon$.
 f_n folytonos, $\implies \exists \delta \in (0, 1)$, $|f_n(t) - f_n(t_0)| \leq \varepsilon$, ha $|t - t_0| < \delta$.

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(t_0)| + |f_n(t_0) - f(t_0)| < 3\varepsilon, \quad \text{ha } |t - t_0| < \delta$$

f folytonos t_0 -ban, tetszőleges $t_0 \in [0, \infty)$ -re.

Állítás

$\varphi \in \mathcal{S}$, $(\varphi^{(n)}) \subset \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez. Ha $\|\varphi^{(n)} - \varphi\|_{L^2(\Omega \times [0,n])} \leq 2^{-n}$, akkor egy majdnem biztos Ω' eseményen $I_t(\varphi^{(n)})$ konvergens minden t -re, és Ω' -n $I(\varphi) = (\lim I_t(\varphi^{(n)}))_{t \geq 0}$ trajektóriái folytonosak.

- A Weierstrass kritérium alapján elég, hogy tetszőleges $T > 0$ -ra

$$\sum_n 1 \wedge \sup_{0 \leq t \leq n} |I_t(\varphi^{(n+1)}) - I_t(\varphi^{(n)})| < \infty, \quad \text{egy valószínűséggel}$$

- $X^{(n)} = I(\varphi^{(n+1)}) - I(\varphi^{(n)}) = I(\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)})$ folytonos trajektóriájú martingál, és a Doob maximál egyenlőtlenség következménye alapján

$$\mathbb{E} \left(1 \wedge \sup_{t \leq n} |X_t^{(n)}| \right) \leq 2\mathbb{E}^{1/2} \left(|X_n^{(n)}| \right) \leq 2\mathbb{E}^{1/4} \left((X_n^{(n)})^2 \right)$$

- Az Itô izometriát és a háromszög egyenlőtlenséget használva

$$\mathbb{E} \left((X_n^{(n)})^2 \right) = \|I_n(\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)})\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0,n])}^2 \leq (2 \cdot 2^{-n})^2$$

Állítás

$\varphi \in \mathcal{S}$, $(\varphi^{(n)}) \subset \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez. Ha $\|\varphi^{(n)} - \varphi\|_{L^2(\Omega \times [0,n])} \leq 2^{-n}$, akkor egy majdnem biztos Ω' eseményen $I_t(\varphi^{(n)})$ konvergens minden t -re, és Ω' -n $I(\varphi) = (\lim I_t(\varphi^{(n)}))_{t \geq 0}$ trajektóriái folytonosak.

- $X^{(n)} = I(\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)})$ folytonos trajektóriájú martingál, és a Doob maximál egyenlőtlenség következménye alapján

$$\mathbb{E} \left(1 \wedge \sup_{t \leq n} |X_t^{(n)}| \right) \leq 2 \mathbb{E}^{1/2} \left(|X_n^{(n)}| \right) \leq 2 \mathbb{E}^{1/4} \left((X_n^{(n)})^2 \right) \leq 2 \cdot (2 \cdot 2^{-n})^{2 \cdot 1/4} = C 2^{-n/2}$$

- Beppo-Lévi tétel:

$$\mathbb{E} \left(\sum_n 1 \wedge \sup_{t \leq n} |X_t^{(n)}| \right) = \sum_n \mathbb{E} \left(1 \wedge \sup_{t \leq n} |X_t^{(n)}| \right) \leq \sum C 2^{-n/2} < \infty$$

- Innen

$$\sum_n 1 \wedge \sup_{t \leq n} |I_t(\varphi^{(n+1)} - \varphi^{(n)})| = \sum_n 1 \wedge \sup_{t \leq n} |X_t^{(n)}| < \infty, \quad \text{egy val.-gel, különben a várható érték } \infty \text{ lenne.}$$

A Weierstrass kritérium használható azon az Ω' eseményen, ahol az összeg véges, ami egy valószínűségű.