

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.02.26.

Definíció

$(M_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ martingál sorozat, ha

- $M_n \in L^1$ valószínűségi változó minden $n \geq 0$ -re.
- $\mathcal{F}_n$ σ algebra és $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ minden $n \geq 0$ -re.
- $M_n \sim \mathcal{F}_n$ minden $n \geq 0$ -re. Röviden az $(M_n)_{n \geq 0}$ sorozat adaptált az $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ filtrációhoz.
- $\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$ minden $n \geq 0$ -re.

- Az utolsó pontot szokás martingál tulajdonságnak hívni.
- $m, n \geq 0$ esetén $\mathbb{E}(M_m | \mathcal{F}_n) = M_{n \wedge m}$, ahol $m \wedge n = \min(m, n)$.
 $m \leq n$ esetén $M_m \sim \mathcal{F}_n$. $m > n$ -re teljes indukció és toronyszabály.
- A martingál az „igazságos játék” modellje. pl. pénzérme dobás sorozatban 1 forintot nyerünk, ha az eredmény fej és egyet veszítünk ha írás. M_n a tőkénk nagysága az n . dobás után. Ekkor M martingál a természetes filtrációban.

Definíció

$(M_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ martingál sorozat, ha

- $M_t \in L^1$ valószínűségi változó minden $t \geq 0$ -re.
- $\mathcal{F}_t$ σ algebra és $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+s}$ minden $t, s \geq 0$ -re.
- $M_t \sim \mathcal{F}_t$ minden $t \geq 0$ -re. Röviden az $(M_t)_{t \geq 0}$ folyamat adaptált az $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ filtrációhoz.
- $\mathbb{E}(M_{t+s} | \mathcal{F}_t) = M_t$ minden $t, s \geq 0$ -re.

- Az utolsó pontot szokás martingál tulajdonságnak hívni.
- Ha a filtrációt nem adjuk meg, akkor a M folyamat természetes filtrációjával értjük a definíciót.
- $t, s \geq 0$ esetén $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_{s \wedge t}$, ahol $s \wedge t = \min(s, t)$.
 $t \leq s$ esetén $M_t \sim \mathcal{F}_s$. $t > s$ -re a martingál tulajdonság.
- A martingál az „igazságos játék” modellje. Pénzügyi matematikában az eszközár folyamat az árazó mérték alatt martingál.
- Megmutatható, hogy (a szokásos feltételek mellett) egy folytonos idejű martingálról mindig feltehetjük, hogy a trajektóriák jobbról folytonosak és balról határértékkel rendelkeznek, azaz càdlàg függvények.
Mi csak folytonos trajektóriájú martingálokat fogunk nézni.

Definíció

$(M_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ martingál sorozat, ha

- $M_t \in L^1$ valószínűségi változó minden $t \geq 0$ -re.
- $\mathcal{F}_t$ σ algebra és $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+s}$ minden $t, s \geq 0$ -re.
- $M_t \sim \mathcal{F}_t$ minden $t \geq 0$ -re. Röviden az $(M_t)_{t \geq 0}$ folyamat adaptált az $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ filtrációhoz.
- $\mathbb{E}(M_{t+s} | \mathcal{F}_t) = M_t$ minden $t, s \geq 0$ -re.

Tétel (Brown mozgás Markov tulajdonsága)

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, $T \geq 0$ determinisztikus időpont. $X_t = B_{T+t} - B_T$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{T+t}$. Ekkor X Brown mozgás a $\mathcal{G}$ filtrációban, így X független $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_T$ -től.

Állítás

Ha X független $\mathcal{A}$ -tól, és $Y \sim \mathcal{A}$, h mérhető és $h(X, Y) \in L^1$, akkor

$$\mathbb{E}(h(X, Y) | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(h(X, y))|_{y=Y} = \mathbb{E}(h(X, Y) | Y)$$

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban.

- B martingál az $\mathcal{F}$ filtrációban. Ha $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_s + B_t - B_s | \mathcal{F}_s) = B_s + \mathbb{E}(B_t - B_s) = B_s$$

- $X_t = B_t^2 - t$. X martingál az $\mathcal{F}$ filtrációban.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((B_s + B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s) - t \\ &= \mathbb{E}((x + B_t - B_s)^2)_{|x=B_s} - t = (x^2 + t - s)_{|x=B_s} - t = B_s^2 - s = X_s\end{aligned}$$

Azt használtuk, hogy $x + B_t - B_s \sim N(x, t - s)$.

- $h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2}$ az n . Hermite polinom.
pl. $h_1(x) = x$, $h_2(x) = (x^2 - 1)$,

$$B_t = \sqrt{t} \cdot h_1\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right), \quad B_t^2 - t = (\sqrt{t})^2 \cdot h_2\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right).$$

Általánosítás: $M_t = t^{n/2} h_n(B_t/\sqrt{t})$ martingál az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha B Brown mozgás $\mathcal{F}$ -ben.

- Z standard normális. $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f_{Z+\lambda}(x)}{f_Z(x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\lambda)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}} = \exp\left\{-\frac{1}{2}((x-\lambda)^2 - x^2)\right\} = \exp\left\{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2\right\}$$

•

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda Z - \frac{1}{2}\lambda^2}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{f_{Z+\lambda}(Z)}{f_Z(Z)}\right) = \int f_{Z+\lambda} = 1$$

•

$$\mathbb{E}(e^{\lambda Z}) = e^{\frac{1}{2}\lambda^2}$$

- Ha $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$, akkor $X = \mu + \sigma Z$, ahol $Z = \frac{1}{\sigma}(X - \mu) \sim N(0, 1)$ és

$$M_X(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \mathbb{E}(e^{\lambda(\mu + \sigma Z)}) = e^{\lambda\mu + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}$$

az X változó momentum generáló függvénye.

$\lambda = 1$ mellett kapjuk a lognormális eloszlás várható értékét.

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban.

- $\lambda \in \mathbb{R}$, $X_t = \exp\{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}$.

Ekkor X martingál az $\mathcal{F}$ -filtrációban. $0 \leq s \leq t$ -re

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t} \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda x + \lambda(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\lambda^2 t}\right)|_{x=B_s} = e^{\lambda B_s + \frac{1}{2}\lambda^2(t-s) - \frac{1}{2}\lambda^2 t} = e^{\lambda B_s - \frac{1}{2}\lambda^2 s}$$

X neve **exponenciális martingál**.

- $\alpha \in \mathbb{R}$ $X_t = \exp\{i\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t\}$.

Ekkor X martingál az $\mathcal{F}$ -filtrációban. $0 \leq s \leq t$ -re

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{i\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t} \mid \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(e^{i\alpha x + i\alpha(B_t - B_s) + \frac{1}{2}\alpha^2 t}\right)|_{x=B_s} \\ &= e^{i\alpha B_s + \frac{1}{2}\alpha^2 t} \mathbb{E}\left(e^{i\alpha(B_t - B_s)}\right) \\ &= e^{i\alpha B_s + \frac{1}{2}\alpha^2 t - \frac{1}{2}\alpha^2(t-s)} = e^{i\alpha B_s + \frac{1}{2}\alpha^2 s}\end{aligned}$$

Tétel

X nullából induló, folytonos trajektóriájú, az $\mathcal{F}$ filtrációhoz adaptált folyamat.

$$M_t^{(\alpha)} = \exp\{i\alpha X_t + \tfrac{1}{2}\alpha^2 t\}, \quad t \geq 0$$

X pontosan akkor Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha $M^{(\alpha)}$ martingál az $\mathcal{F}$ filtrációban $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ mellett.

- $\Rightarrow$: kiszámoltuk korábban.
- $\Leftarrow$. Emlékeztető. X Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha nullából induló, folytonos trajektóriájú $\mathcal{F}$ adaptált, és $0 \leq s \leq t$ esetén $\mathcal{F}_s \perp\!\!\!\perp X_t - X_s \sim N(0, t-s)$.
- Kell: $0 \leq s \leq t$ esetén $X_t - X_s$ független az $\mathcal{F}_s$ σ -algebrától és $X_t - X_s \sim N(0, t-s)$.
- Emlékeztető. Ha $\mathbb{E}(e^{i\alpha Y} \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(e^{i\alpha Y})\mathbb{P}(A)$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $Y \perp\!\!\!\perp A$.
- $M^{(\alpha)}$ martingál tulajdonsága: ha $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}\left(e^{i\alpha X_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t} \mid \mathcal{F}_s\right) = e^{i\alpha X_s + \frac{1}{2}\alpha^2 s}, \implies \mathbb{E}\left(e^{i\alpha(X_t - X_s)} \mid \mathcal{F}_s\right) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-s)}$$

•

$$\mathbb{E}\left(e^{i\alpha(X_t - X_s)} \mid \mathcal{F}_s\right) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-s)} \implies \mathbb{E}\left(e^{i\alpha(X_t - X_s)} \mathbb{1}_A\right) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-s)}\mathbb{P}(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}_s$$

ekkor ugyanis $X_t - X_s$ karakterisztikus függvénye $e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(t-s)}$ ($A = \Omega$) és $\forall A \in \mathcal{F}_s$ független az $X_t - X_s$ változótól.

Definíció

Az $(X_t)_{t \geq 0}$ folyamat **szubmartingál** az $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ filtrációban, ha X integrálható változókból áll, adaptált az $\mathcal{F}$ filtrációhoz és $\mathbb{E}(X_{t+s} | \mathcal{F}_t) \geq X_t$, minden $s, t \geq 0$ -ra.

A szubmartingál a nyereséges játék modellje.

Példák.

- Ha M martingál $\mathcal{F}$ -ben és φ konvex függvény, $\varphi(M_t) \in L^1$ minden t -re, akkor $(X_t = \varphi(M_t))_{t \geq 0}$ szubmartingál.

Ellenőrzés. Jensen egyenlőtlenség, $s, t \geq 0$ -ra

$$\mathbb{E}(\varphi(M_{t+s}) | \mathcal{F}_t) \geq \varphi(\mathbb{E}(M_{t+s} | \mathcal{F}_t)) = \varphi(M_t).$$

- M martingál $|M|$ szubmartingál.
- B Brown mozgás. $|B|$, B^2 és $\exp\{B\}$ szubmartingálok.

Állítás (Doob maximál egyenlőtlenség, diszkrét idő)

$\mathbf{T} = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = t\} \subset [0, \infty)$, $(X_u, \mathcal{F}_u)_{u \in \mathbf{T}}$ szubmartingál, $X^* = \max_{u \in \mathbf{T}} X_u$, $\lambda > 0$

$$\lambda \mathbb{P}(X^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_{(X^* \geq \lambda)}) \quad \text{és} \quad \lambda \mathbb{P}(X^* > \lambda) \leq \mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_{(X^* > \lambda)})$$

- $\tau = \inf\{u \in \mathbf{T} : X_u \geq \lambda\}$. Ekkor $\{\tau = t_i\} \in \mathcal{F}_{t_i}$ és $\lambda \mathbb{1}_{(\tau = t_i)} \leq X_{t_i} \mathbb{1}_{(\tau = t_i)}$.

$$\lambda \mathbb{P}(\tau < \infty) = \lambda \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(\tau = t_i) \leq \sum_i \mathbb{E}(X_{t_i} \mathbb{1}_{(\tau = t_i)}) \leq \sum_i \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t_i}) \mathbb{1}_{(\tau = t_i)}) = \mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_{(\tau < \infty)}).$$

- Szigorú egyenlőtlenséges változathoz $\tau = \inf\{u \in \mathbf{T} : X_u > \lambda\}$.

Állítás (Doob maximál egyenlőtlenség)

$(X, \mathcal{F})$ folytonos trajektóriájú szubmartingál, $X_t^* = \max_{u \leq t} X_u$, $\lambda > 0$

$$\lambda \mathbb{P}(X_t^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_{(X_t^* \geq \lambda)}) \quad \text{és} \quad \lambda \mathbb{P}(X_t^* > \lambda) \leq \mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_{(X_t^* > \lambda)})$$

Megjegyzés. Elég lenne, hogy X càdlàg.

- $\{0, t\} \subset \mathbf{T}_n \subset \mathbf{T}_{n+1}$, $\cup_n \mathbf{T}_n$ sűrű, pl. bővebb mint $\mathbb{Q} \cap [0, t]$.
- $Y_n = \max_{u \in \mathbf{T}_n} X_u$.

$$\max_{u \in \mathbf{T}_n} X_u = Y_n \leq \max_{t \in \mathbf{T}_{n+1}} X_t = Y_{n+1} \nearrow \sup_{u \leq t} X_u = X_t^*$$

•

$$\lambda \mathbb{P}(X_t^* > \lambda) = \lambda \mathbb{P}(\cup_n \{Y_n > \lambda\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \mathbb{P}(Y_n > \lambda) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_{(Y_n > \lambda)}) = \mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_{(X_t^* > \lambda)})$$

- $\geq$ -hez, $\lambda - 1/n$ mellett az igazolt változat és $n \rightarrow \infty$.

Következmény

Ha X nem negatív folytonos trajektóriájú szubmartingál, akkor $\mathbb{P}(X_t^* > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X_t)$.

Állítás

X folytonos trajektóriájú martingál. Ekkor

$$\mathbb{E}\left(1 \wedge \max_{s \leq t} |X_s|\right) \leq 2\sqrt{\mathbb{E}(|X_t|)}$$

- $Y = |X|$ folytonos trajektóriájú szubmartingál. Emlékeztető:

$$|X_t| \geq X_t \quad \mathbb{E}(|X_t| | \mathcal{F}_s) \geq \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \quad \text{ha } s \leq t$$

$-X$ -re is felírva $\mathbb{E}(|X_t| | \mathcal{F}_s) \geq \max(X_s, -X_s) = |X_s|$.

- $\varepsilon > 0$ -ra

$$\mathbb{E}(1 \wedge Y_t^*) = \mathbb{E}((1 \wedge Y^*) \mathbb{1}_{(Y^* \leq \varepsilon)}) + \mathbb{E}((1 \wedge Y^*) \mathbb{1}_{(Y^* > \varepsilon)}) \leq \varepsilon + \mathbb{P}(Y_t^* > \varepsilon) \leq \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}(Y_t) \leq 2\sqrt{\mathbb{E}(Y_t)}.$$

Az utolsó lépésben $\varepsilon = \mathbb{E}^{1/2}(Y_t) = \sqrt{\mathbb{E}(|X|_t)}$ választást használjuk, ha az pozitív. Ha $\mathbb{E}(Y_t) = 0$, akkor a baloldal is nulla.

- $(S_t)_{t \in [0, T]}$ a részvényár folyamat. $t \mapsto S_t$ folytonos.
- $(\varphi_t)_{t \in [0, T]}$ a kereskedési stratégia. φ_t a t pillanatban birtokolt részvények darabszáma. φ szakaszonként konstans, csak a $0 = t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq T$ időpontokban kereskedhetünk.
- Ha részvényt eladunk, vagy vásárolunk az a bankszámlákról történik. Betéti és hitel kamatrátája is 0. A kereskedési stratégia önfinanszírozó.
- A t pillanatban a portfólió értéke V_t .

$$V_t = \varphi_t S_t + B_t = \varphi_{t_k+} S_t + B_{t_k+} = \varphi_{t_k+} (S_t - S_{t_k}) + V_{t_k+}, \quad \text{ha } t_k \leq t < t_{k+1}$$

Önfinanszírozás miatt $V_{t_i+} = V_{t_i-}$ és

$$V_t = V_0 + \sum_{i < k} \varphi_{t_i} (S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) + \varphi_{t_k} (S_t - S_{t_k}), \quad \text{ha } t_k \leq t \leq t_{k+1}.$$

Rövidebb írásmód

$$V_t = V_0 + \sum_i \varphi_{t_i} (S_{t_{i+1} \wedge t} - S_{t_i \wedge t}) = V_0 + \int_0^t \varphi_u dS_u$$

- Egyszerű integrandusok integrálja, mint az előző dián.
Kiderül, hogy az integrálás eredménye 0-ból induló, folytonos trajektóriájú, négyzetesen integrálható martingál, ami az Itô izometriát is teljesíti.
- Kiterjesztés, izometriát használva.
- További kiterjesztés lokalizálással.
- Itô formula, Itô folyamat.

Miről nem lesz szó?

- Brown mozgás helyett folytonos trajektóriájú négyzetesen integrálható martingálokkal is kezdhetnénk.
Az elmélet teljesen analóg.
Nincs rá időnk.
- Általános szemimartingálok szerinti integrál.

Definíció

A φ folyamat egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha φ az $\mathcal{F}$ filtrációhoz adaptált, korlátos folyamat és létezik $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_r$ úgy, hogy

$$\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})} \quad (*)$$

- $\varphi_s = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{([t_i, t_{i+1}))}(s) = \varphi_{t_k}$, ha $s \in [t_k, t_{k+1})$ és φ_s nulla, ha a felosztásnak nincs olyan tagja, aminek s eleme.
- φ adaptált, ezért $\varphi_{t_i} \sim \mathcal{F}_{t_i}$ a felírás mindegyik tagjában.
- φ korlátos, azaz létezik $K \in \mathbb{R}$ amire $|\varphi| \leq K$ és így $|\varphi_{t_i}| \leq K$.
- φ felírása $(*)$ alakban nem egyértelmű. A $t_0 < t_1 < \dots < t_r$ osztópontoknak csak az a szerepe, hogy φ értéke ezeken az időpontokon kívül nem változhat.
Új osztópontok hozzá vételével ez a tulajdonság megmarad.

Definíció

A φ folyamat egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha φ az $\mathcal{F}$ filtrációhoz adaptált, korlátos folyamat és létezik $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_r$ úgy, hogy $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$.

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban.

- $K > 0$ rögzített.

$$\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{k}{n}} \mathbb{1}_{(|B_{\frac{k}{n}}| \leq K)} \mathbb{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})}$$

φ egyszerű.

-

$$\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{k}{n}} \mathbb{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})}$$

Nem egyszerű, mert nem korlátos. Tetszőleges K -ra $\mathbb{P}(\varphi_{1/n} > K) > 0$!

Definíció

A φ folyamat egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha φ az $\mathcal{F}$ filtrációhoz adaptált, korlátos folyamat és létezik $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_r$ úgy, hogy $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$.

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban.

•

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \text{sign}(B_k) \mathbb{1}_{[k, k+1)}, \quad \text{ahol } \text{sign}(x) = \mathbb{1}_{(x>0)} - \mathbb{1}_{(x<0)} \text{ az előjel függvény.}$$

Nem egyszerű, mert a „lépcsők” száma nem véges. $\mathbb{P}(\text{sign}(B_k) = 0) = 0$ minden $k \geq 1$ -re.

•

$$\varphi = \text{sign}(B_1) \mathbb{1}_{[0,1)}$$

Nem egyszerű, mert nem adaptált.

$\varphi_0 = \text{sign}(B_1)$ nem mérhető az $\mathcal{F}_0$ σ -algebrára, mert független tőle és nem elfajult eloszlású.

HF. Egyszerű integrandusok összege, szorzata, skalár szorosa egyszerű integrandus.

Definíció

A φ folyamat egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha φ az $\mathcal{F}$ filtrációhoz adaptált, korlátos folyamat és létezik $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_r$ úgy, hogy $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$.

Definíció

B Brown mozgás, φ egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban.

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$$

$I(\varphi)$ az integrálással kapott folyamat.

A $[0, t]$ intervallumot felbontjuk a t_i osztópontokkal és minden darabon a B növekményét φ aktuális értékével felszorozva összeadjuk.

Definíció

A φ folyamat egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha φ az $\mathcal{F}$ filtrációhoz adaptált, korlátos folyamat és létezik $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_r$ úgy, hogy $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$.

B Brown mozgás, φ egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban. $I_t(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$.

- $I(\varphi)$ jól definiált, azaz nem függ az osztópont rendszer megválasztásától. Azaz, ha

$$\varphi = \sum_i \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})} = \sum_j \varphi_{s_j} \mathbb{1}_{[s_j, s_{j+1})}, \implies \forall t \geq 0, \quad \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}) = \sum_j \varphi_{s_j} (B_{s_{j+1} \wedge t} - B_{s_j \wedge t}).$$

- Ha $\{t_0, t_1, \dots, t_r\} \subset \{s_0, s_1, \dots, s_q\}$, akkor világos, mert minden $(t_i \wedge t, t_{i+1} \wedge t)$ intervallumot tovább osztottunk:

$$\begin{aligned} \sum_j \varphi_{s_j} (B_{s_{j+1} \wedge t} - B_{s_j \wedge t}) &= \sum_i \sum_{j: [s_j, s_{j+1}) \subset [t_i, t_{i+1})} \varphi_{s_j} (B_{s_{j+1} \wedge t} - B_{s_j \wedge t}) \\ &= \sum_i \varphi_{t_i} \sum_{j: [s_j, s_{j+1}) \subset [t_i, t_{i+1})} (B_{s_{j+1} \wedge t} - B_{s_j \wedge t}) = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}) \end{aligned}$$

- $\{t'_i\}, \{t''_j\}$ esetén legyen $\{s_k\}$ a két osztópontrendszer uniója. Mindkét összeg az $\{s_k\}$ -ből számolt összeggel egyezik meg.

Definíció

A φ folyamat egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha φ az $\mathcal{F}$ filtrációhoz adaptált, korlátos folyamat és létezik $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_r$ úgy, hogy $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$.

B Brown mozgás, φ egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban. $I_t(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$.

- Láttuk, hogy $I(\varphi)$ jól definiált.
- $\varphi \mapsto I(\varphi)$ **lineáris**. $I(c\varphi) = cI(\varphi)$ HF.

Ha φ, ψ egyszerű integrandusok, akkor felírhatóak közös osztópont rendszert használva

$$\varphi + \psi = \sum_i \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})} + \sum_i \psi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})} = \sum_i (\varphi + \psi)_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$$

amiből

$$I_t(\varphi + \psi) = \sum_i (\varphi + \psi)_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}) = I_t(\varphi) + I_t(\psi)$$

Definíció

A φ folyamat egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha φ az $\mathcal{F}$ filtrációhoz adaptált, korlátos folyamat és létezik $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_r$ úgy, hogy $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$.

B Brown mozgás, φ egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban. $I_t(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$.

Tétel

B Brown mozgás, φ egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban. Ekkor $I(\varphi)$ nullából induló, folytonos trajektóriájú, négyzetesen integrálható martingál $\mathcal{F}$ -ben, amire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_t(\varphi)) &= \mathbb{E}(I_0(\varphi)) = 0, \\ \mathbb{D}^2(I_t(\varphi)) &= \mathbb{E}(I_t^2(\varphi)) = \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds \end{aligned} \quad (*)$$

(*) összefüggés neve: **Itô izometria**, mert azt állítja, hogy $\|I_t(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times [0, t])}$.

Egy $(X_t)_{t \geq 0}$ folyamat négyzetesen integrálható, ha $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ minden t -re.

Állítás

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, φ egyszerű integrandus, azaz korlátos, $\mathcal{F}$ -adaptált

$\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$ alkalmas $\{t_i\}$ osztópontokkal. $I_t(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$.

Ekkor $I(\varphi)$ nullából induló, folytonos trajektóriájú, négyzetesen integrálható, $\mathcal{F}$ -adaptált folyamat.

- $I_0(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge 0} - B_{t_i \wedge 0}) = 0$.
- $t \mapsto B_{t_i \wedge t}$ folytonos, $t \mapsto I_t(\varphi)$ folytonos függvények véletlen együtthatós lineáris kombinációja, azaz $t \mapsto I_t(\varphi)$ folytonos.
- $\mathbb{E}((\varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}))^2) \leq K^2(t_{i+1} - t_i)$, ha $|\varphi| \leq K$.
 $I_t(\varphi)$ véges sok négyzetesen integrálható változó összege, maga is négyzetesen integrálható.
(Háromszög egyenlőtlenség: $\|X + Y\|_{L^2(\Omega)} \leq \|X\|_{L^2(\Omega)} + \|Y\|_{L^2}$)
- Adaptáltság:

$$I_t(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}) = \sum_{i: t_i < t} \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$$

Mivel φ, B adaptált folyamatok az $\mathcal{F}$ filtrációhoz, $\varphi_{t_i}, B_{t_j \wedge t} \sim \mathcal{F}_t$, ha $t_i \leq t$ és $I_t(\varphi) \sim \mathcal{F}_t$.

Állítás

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, φ egyszerű integrandus, azaz korlátos, $\mathcal{F}$ -adaptált

$\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$ alkalmas $\{t_i\}$ osztópontokkal. $I_t(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$.

Ekkor $I(\varphi)$ martingál.

- $I(\varphi)$ integrálható (sőt négyzetesen integrálható) változókból álló, $\mathcal{F}$ adaptált folyamat, csak a martingál tulajdonságot kell ellenőrizni: $0 \leq s < t$ esetén $\mathbb{E}(I_t(\varphi) | \mathcal{F}_s) = I_s(\varphi)$.
- Feltehető hogy s, t a φ felírásában használt osztópont rendszerhez tartozik: $s = t_k, t = t_\ell, k < \ell$.
- $I_t(\varphi)$ összeg alakú, elég a feltételes várható értéket tagonként számolni.

$$I_t(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}) = \sum_{i < \ell} \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}), \quad I_s(\varphi) = \sum_{i < k} \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

- Tetszőleges i -re, B martingál tulajdonságából

$$\mathbb{E}(\varphi_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_i}) = \varphi_{t_i} \mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}) = 0$$

$$\mathbb{E}(\varphi_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_k}) = \begin{cases} \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) & i < k \\ \mathbb{E}(\mathbb{E}(\varphi_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_i}) | \mathcal{F}_{t_k}) = 0 & i \geq k \end{cases} \implies \mathbb{E}(I_t(\varphi) | \mathcal{F}_s) = I_s(\varphi).$$

Egy folyamat növekményei ortogonálisak, ha egymásba nem nyúló intervallumokon vett növekmények szorzata nulla várható értékű.

Állítás

M nullából induló, négyzetesen integrálható martingál. Ekkor M növekményei ortogonálisak, és tetszőleges $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r = t$ osztópont rendszerre:

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \sum_{i=0}^{r-1} \mathbb{E}((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2)$$

- $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r = t$. $0 \leq i < j < r$, ekkor $t_i < t_{i+1} \leq t_j$ és

$$\mathbb{E}((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j}) = (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\mathbb{E}((M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) \mid \mathcal{F}_{t_j}) = 0$$

M martingál tulajdonsága miatt.

- $\Delta_i = M_{t_{i+1}} - M_{t_i}$ jelöléssel, $M_t = M_t - M_0 = \sum_i \Delta_i$

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_i \Delta_i\right)^2\right) = \sum_i \mathbb{E}(\Delta_i^2) + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E}(\Delta_i \Delta_j) = \sum_i \mathbb{E}(\Delta_i^2).$$