

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.02.20.

Definíció

$X \in L^1$ valószínűségi változó, $\mathcal{A}$ σ -algebra. $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ olyan $\mathcal{A}$ mérhető, integrálható változó, ami teljesíti a parciális átlagolási tulajdonságot:

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) \mathbb{1}_A), \quad \text{minden } A \in \mathcal{A}\text{-re.}$$

Jelölés: $\mathbb{P}(A | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \mathcal{A})$

- Ez valójában egy **Radon-Nikodym derivált**, $\mu(A) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A)$ véges előjeles mérték $\mathcal{A}$ -n, ami $\mathbb{P}|_{\mathcal{A}}$ -re nézve abszolút folytonos. $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = \frac{d\mu}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{A}}}$.
 $X \in L^1$ esetén létezik és lényegében egyértelmű, $Z, Z' \sim \mathcal{A}$ mindkettő teljesíti a parciális átlagolási tulajdonságot $(X, \mathcal{A})$ -fel, akkor $\mathbb{P}(Z = Z') = 1$.
- Jelölés: ha $\mathcal{A} = \sigma(Y)$, akkor $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(X | Y)$. Ekkor $\mathbb{E}(X | Y) = g(Y)$ alakú, ahol g Borel mérhető.
- **Szemléletes jelentés** $g(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}(X | |Y - y| < \varepsilon)$ (Y eloszlása szerint majdnem minden y -ra).
- Ha Y diszkrét, $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, akkor $g(y) = \mathbb{E}(X | Y = y)$. Ezt a jelölést szokás használni, a g függvényre, akkor is ha Y nem diszkrét.
- Ha $X \in L^2$, akkor $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) \in L^2$ és $X - \mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ merőleges $L^2(\mathcal{A})$ -re. $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ **nem más, mint X vetülete $L^2(\mathcal{A})$ -re.**

Definíció (Emlékeztető)

$X \in L^1$ valószínűségi változó, $\mathcal{A}$ σ -algebra. $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ olyan $\mathcal{A}$ mérhető, integrálható változó, ami teljesíti a parciális átlagolási tulajdonságot:

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) \mathbb{1}_A), \quad \text{minden } A \in \mathcal{A}\text{-re.}$$

$\mathbb{E}(X | Y)$.

- Ha Y diszkrét, akkor $\mathbb{E}(X | Y) = g(Y)$, ahol $g(y) = \mathbb{E}(X | Y = y) = \frac{1}{\mathbb{P}(Y=y)} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{(Y=y)})$.
Ugyanis $A \in \sigma(Y)$ akkor $A = \{Y \in H\}$ és

$$\mathbb{E}(g(Y) \mathbb{1}_{(Y \in H)}) = \sum_{y \in H} g(y) \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y \in H} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{(Y=y)}) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{(Y \in H)})$$

- Ha (X, Y) -nak létezik együttes sűrűségfüggvénye, akkor $\mathbb{E}(h(X) | Y) = g(Y)$, ahol

$$g(y) = \int h(x) \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

$$\mathbb{E}(g(Y) \mathbb{1}_{(Y \in H)}) = \int_H g(y) f_Y(y) dy = \int_H \int h(x) f_{X,Y}(x, y) dx dy = \mathbb{E}(h(X) \mathbb{1}_{(Y \in H)})$$

Állítás

Ha X független $\mathcal{A}$ -től, és $Y \sim \mathcal{A}$, h mérhető és $h(X, Y) \in L^1$, akkor

$$\mathbb{E}(h(X, Y) \mid \mathcal{A}) = \mathbb{E}(h(X, y))|_{y=Y} = \mathbb{E}(h(X, Y) \mid Y)$$

A formula akkor is igaz, ha X, Y vektorváltozó, vagy folyamat.

1. eset $\mathcal{A} = \sigma(Y)$

- Kell g mérhető, amivel $\mathbb{E}(h(X, Y)\mathbb{1}_{(Y \in H)}) = \mathbb{E}(g(Y)\mathbb{1}_{(Y \in H)})$.
- X, Y független, emiatt az együttes eloszlás szorzat alakú

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(X, Y)\mathbb{1}_{(Y \in H)}) &= \int h(x, y)\mathbb{1}_{(y \in H)}Q_{X, Y}(dx, dy) \\ &= \int \mathbb{1}_{(y \in H)} \int h(x, y)Q_X(dx)Q_Y(dy) = \mathbb{E}(g(Y)\mathbb{1}_{(Y \in H)})\end{aligned}$$

ahol

$$g(y) = \int h(x, y)Q_X(dx) = \mathbb{E}(h(X, y))$$

Állítás

Ha X független $\mathcal{A}$ -től, és $Y \sim \mathcal{A}$, h mérhető és $h(X, Y) \in L^1$, akkor

$$\mathbb{E}(h(X, Y) \mid \mathcal{A}) = \mathbb{E}(h(X, y))|_{y=Y} = \mathbb{E}(h(X, Y) \mid Y)$$

2. eset $\mathcal{A}$ tetszőleges a feltételnek eleget tevő σ algebra

- $g(y) = \mathbb{E}(h(X, y))$ mérhető függvény (Ez a Fubini tétel következménye).
- $g(Y) \sim \mathcal{A}$, vagyis csak a parciális átlagolási tulajdonságot kell ellenőrizni.

$$\mathbb{E}(h(X, Y)\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(g(Y)\mathbb{1}_A), \quad \text{minden } A \in \mathcal{A} \text{ eseményre}$$

- $A \in \mathcal{A}$. Ha $\mathbb{P}(A) = 0$ esetén mindkét oldal nulla.
- $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) > 0$ esetén legyen $Q(H) = \mathbb{P}(H \mid A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_H \frac{\mathbb{1}_A}{\mathbb{P}(A)}\right)$.

$$Q(X \in H_1, Y \in H_2) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{(X \in H_1)} \mathbb{1}_{(Y \in H_2)} \mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(X \in H_1) Q(Y \in H_2), \quad \mathbb{1}_{(Y \in H_2)} \mathbb{1}_A \sim \mathcal{A} \perp\!\!\!\perp X$$

- Mivel $\mathbb{P}$ és Q alatt X eloszlása ugyanaz $g(y) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h(X, y)) = \mathbb{E}_Q(h(X, y))$ és $\mathbb{E}_Q(h(X, Y) \mid Y) = g(Y)$.

$$\mathbb{E}(h(X, Y)\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}_Q(h(X, Y)) = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}_Q(g(Y)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(g(Y)\mathbb{1}_A)$$

Állítás (Korábban láttuk)

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban, $T \geq 0$ determinisztikus időpont. $X_t = B_{T+t} - B_T$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{T+t}$. Ekkor X Brown mozgás a $\mathcal{G}$ filtrációban, így X független a $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_T$ σ -algebrától.

Definíció

$(X_t)_{t \geq 0}$ Markov folyamat az $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ filtrációban, ha X adaptált $\mathcal{F}$ -hez és tetszőleges $0 \leq s, t$ esetén $\mathbb{P}(X_{t+s} \in H \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in H \mid X_t)$.

„ X jövőbeli viselkedése, csak az aktuális állapoton keresztül függ a múlttól”

Ha B Brown mozgás $\mathcal{F}$ -ben, akkor t időpontban újrainduló folyamat $X_s = B_{t+s} - B_t$, $s \geq 0$ független $\mathcal{F}_t$ -től és

$$\mathbb{P}(B_{t+s} \in H \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(B_t + X_s \in H \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(x + X_s \in H)_{|x=B_t} = \mathbb{P}(B_{t+s} \in H \mid B_t)$$

Azaz B Markov folyamat $\mathcal{F}$ -ben.

A Markov tulajdonságot implicit módon használják a pénzügyi matematikában, amikor azt teszik fel, hogy egy származtatott termék ára t -ben, csak az aktuális ártól függ.

Definíció (Emlékeztető)

$X \in L^1$ valószínűségi változó, $\mathcal{A}$ σ -algebra. $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ olyan $\mathcal{A}$ mérhető, integrálható változó, ami teljesíti a parciális átlagolási tulajdonságot:

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) \mathbb{1}_A), \quad \text{minden } A \in \mathcal{A}\text{-re.}$$

- Ha $Z \sim \mathcal{A}$ és $\mathbb{E}(Z \mathbb{1}_A) = 0$ minden $A \in \mathcal{A}$ -re, akkor $\mathbb{P}(Z = 0) = 1$.
Ebből következik, hogy **a feltételes várható érték lényegében egyértelmű**. Ha Z, Z' eleget tesz $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ definíciójának, akkor $\mathbb{P}(Z = Z') = 1$.
- **Linearitás.** $X, Y \in L^1$, $\mathbb{E}(X + Y | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{A}) + \mathbb{E}(Y | \mathcal{A})$.
Ellenőrzés, a jobb oldal $\mathcal{A}$ mérhető és teljesíti az $X + Y$ -ra vonatkozó parciális átlagolási tulajdonságot. Ugyanígy kapjuk, hogy $\mathbb{E}(cX | \mathcal{A}) = c\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$, ha $c \in \mathbb{R}$.
- **Rendezés tartás.** $X \geq 0$ $X \in L^1$, ekkor $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) \geq 0$ (majdnem biztosan).
Ellenőrzés: $A = \{\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) < 0\} \in \mathcal{A}$ és $0 \leq \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) \mathbb{1}_A) \leq 0$. $-\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) \mathbb{1}_A \geq 0$ nulla várható értékkel, ezért majdnem biztosan nulla és így $\mathbb{P}(A) = 0$.
- $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$, $X \in L^1$. Ekkor $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(X)$.

Definíció (Emlékeztető)

$X \in L^1$ valószínűségi változó, $\mathcal{A}$ σ -algebra. $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ olyan $\mathcal{A}$ mérhető, integrálható változó, ami teljesíti a parciális átlagolási tulajdonságot:

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) \mathbb{1}_A), \quad \text{minden } A \in \mathcal{A}\text{-re.}$$

- **Feltételből számolható szorzótényező kiemelhető:** $X \in L^1$, $Z \sim \mathcal{A}$ és $XZ \in L^1$. Ekkor $\mathbb{E}(XZ | \mathcal{A}) = Z\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$.
Ellenőrzés. $Z = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{A}$ választással a parciális átlagolási tulajdonságból következik.
Linearitással kiterjed tetszőleges $Z = \sum_i c_i \mathbb{1}_{A_i}$, $A \in \mathcal{A}$ „lépcsős függvényre”.
Limeszeléssel tetszőleges Z -re átvihető.
- **Jensen egyenlőtlenség:** φ konvex X , $\varphi(X) \in L^1$. Ekkor $\varphi(\mathbb{E}(X | \mathcal{A})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X) | \mathcal{A})$.
pl. $\varphi(x) = x^2$, $X \in L^2$, ekkor $\mathbb{E}^2(X | \mathcal{A}) \leq \mathbb{E}(X^2 | \mathcal{A})$.
Ellenőrzés.

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) + \varphi'_-(x)(y - x)$$

y helyére X , x helyére $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ -et írunk és feltételes várható értéket veszünk.

Definíció (Emlékeztető)

$X \in L^1$ valószínűségi változó, $\mathcal{A}$ σ -algebra. $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ olyan $\mathcal{A}$ mérhető, integrálható változó, ami teljesíti a parciális átlagolási tulajdonságot:

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) \mathbb{1}_A), \quad \text{minden } A \in \mathcal{A}\text{-re.}$$

- h mérhető $h(X, Y) \in L^1$, $Y \sim \mathcal{A}$. Ekkor $\mathbb{E}(h(X, Y) | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(h(X, y))|_{y=Y} = \mathbb{E}(h(X, Y) | Y)$.

Speciális esetek:

$Y = 0$, azaz $h(x, y) = h(x)$. Ha $X \perp \mathcal{A}$, akkor $\mathbb{E}(h(X) | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(h(X))$.

$X = 0$, azaz $h(x, y) = h(y)$. Ha $Y \sim \mathcal{A}$, akkor $\mathbb{E}(h(Y) | \mathcal{A}) = h(Y)$.

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(X)$.

Ugyanis $\mathcal{A} \perp X$.

- **Torony szabály**, vagy **teljes várható érték tétel**. $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ σ -algebrák. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Ekkor

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{B}) | \mathcal{A}).$$

Ellenőrzés. $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, $Y = \mathbb{E}(X | \mathcal{B})$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | \mathcal{A}) \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{B}) \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A).$$

Következmény. Teljes várható érték tétel: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A}))$.

Definíció (Emlékeztető)

$X \in L^1$ valószínűségi változó, $\mathcal{A}$ σ -algebra. $\mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ olyan $\mathcal{A}$ mérhető, integrálható változó, ami teljesíti a parciális átlagolási tulajdonságot:

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) \mathbb{1}_A), \quad \text{minden } A \in \mathcal{A}\text{-re.}$$

Jensen egyenlőtlenség: konvex φ -re

$$\varphi(\mathbb{E}(X | \mathcal{A})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X) | \mathcal{A})$$

- **Kontraktív tulajdonság:** $\varphi(x) = |x|^p$, $p \geq 1$ konvex (derivált monoton nő). Ha $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$, röviden $X \in L^p$, akkor

$$|\mathbb{E}(X | \mathcal{A})|^p \leq \mathbb{E}(|X|^p | \mathcal{A}) \implies \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X | \mathcal{A})|^p) \leq \mathbb{E}(|X|^p) \quad \text{másképp} \quad \|\mathbb{E}(X | \mathcal{A})\|_p \leq \|X\|_p$$

ahol $\|X\|_p = \mathbb{E}^{1/p}(|X|^p)$ az L^p norma.

- **Folytonosság:** ha $p \geq 1$, $X_n \in L^p$, $X_n \rightarrow X$ L^p -ben, akkor $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ szintén L^p -ben.

$$\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X_n | \mathcal{A}) - \mathbb{E}(X | \mathcal{A})|^p) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X_n - X|^p | \mathcal{A})) = \|X_n - X\|_p^p \rightarrow 0$$

Tétel (Beppo Lévi, más néven monoton konvergencia tétel)

$0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ $X_n \rightarrow X \in L^1$. Ekkor $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{E}(X | \mathcal{A})$ egy valószínűséggel és L^1 -ben.

Tétel (Fatou lemma)

$0 \leq X_n, X_n \in L^1$. Ekkor $\liminf X_n \in L^1$ és

$$\mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n | \mathcal{A}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{A})$$

$$\liminf f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k.$$

Tétel (Lebesgue, más néven dominált konvergencia tétel)

$X_n \rightarrow X$ egy valószínűséggel, $Y \in L^1$ és $|X_n| \leq Y$ minden n -re. Ekkor $\lim \mathbb{E}(X_n | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{A})$.

Fatou lemma $Y + X_n$ és $Y - X_n$ sorozatokra.