

# Sztochasztikus folyamatok előadás

---

2025.02.19.

## Állítás

$B$  Brown mozgás.

$$X_t = \begin{cases} tB_{1/t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}.$$

Ekkor  $X$  Brown mozgás.

- $X_0 = 0$ ,  $X$  trajektóriája a  $(0, \infty)$  nyílt félegyenesen folytonos.
- $X$  Gauss folyamat: mert  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_r})$  a  $(B_{1/t_1}, \dots, B_{1/t_r})$  normális vektorváltozó lineáris függvénye.
- $\mathbb{E}(X_t) = t\mathbb{E}(B_{1/t}) = 0$ , ha  $t > 0$ , és  $\mathbb{E}(X_0) = 0$ .
- $\text{cov}(X_0, X_t) = 0 = \min(t, 0)$ . Ha  $0 < s, t$ , akkor

$$\text{cov}(X_s, X_t) = \text{cov}(sB_{1/s}, tB_{1/t}) = st \text{cov}(B_{1/s}, B_{1/t}) = st \min(1/s, 1/t) = \min(t, s)$$

- Ha a trajektóriák a  $t = 0$ -ban is folytonosak, akkor  $X$  Brown mozgás.
- Ötlet.  $\{X_t : t > 0\} \stackrel{d}{=} \{B_t : t > 0\}$  mert  $(0, \infty)$ -n folytonos Gauss folyamatok, azonos várható érték és kovariancia függvénnyel.

Ezért  $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow 0} X_t = 0) = \mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow 0} B_t = 0) = 1$ .

## $X_t = tB_{1/t}$ limesze nullában

- $X_t = tB_{1/t}$ ,  $t > 0$ .  $(X_t)_{t>0} \stackrel{d}{=} (B_t)_{t>0}$ . Cél:  $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow 0} X_t = 0) = \mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow 0} B_t = 0) = 1$ .
- $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$  pontosan akkor, ha minden  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik  $\delta > 0$  úgy, hogy  $|f(t)| \leq \varepsilon$ , minden  $0 < t < \delta$  esetén.

Elég  $\varepsilon \in \{1/n : n \geq 1\}$ ,  $\delta \in \{1/k : k \geq 1\}$ -re ellenőrizni.

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow 0} B_t = 0 \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{q \in (0, \frac{1}{k}) \cap \mathbb{Q}} \{ |B_q| \leq \frac{1}{n} \} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}(B)$$

- $A_{n,k} \subset A_{n,k+1}$  minden  $k$ -re, és  $\cup_k A_{n+1,k} \subset \cup_k A_{n,k}$ , azaz

$$\mathbb{P}(\cap_n \cup_k A_{n,k}) = \lim_n \mathbb{P}(\cup_k A_{n,k}) = \lim_n \lim_k \mathbb{P}(A_{n,k})$$

- Ha  $\mathbb{P}(A_{n,k}(B)) = \mathbb{P}(A_{n,k}(X))$ , akkor  $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow 0} X_t = 0) = \mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow 0} B_t = 0)$ .
- Legyen  $(0, 1/k) \cap \mathbb{Q} = \{q_\ell : \ell \geq 1\}$ .  $B$  és  $X$  véges dimenziós eloszlásai azonosak:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n,k}(B)) &= \mathbb{P}(\cap_{\ell=1}^{\infty} \{ |B_{q_\ell}| \leq 1/n \}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\cap_{\ell=1}^r \{ |B_{q_\ell}| \leq 1/n \}) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\cap_{\ell=1}^r \{ |X_{q_\ell}| \leq 1/n \}) = \mathbb{P}(A_{n,k}(X)) \end{aligned}$$

### Állítás (Emlékeztető: Időinverzió)

*$B$  Brown mozgás,  $X_t = tB_{1/t}$ , ha  $t > 0$  és  $X_0 = 0$ . Ekkor  $X$  is Brown mozgás.*

### Állítás (Nagy számok törvénye Brown mozgásra)

*Ha  $B$  Brown mozgás, akkor  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} B_t = 0$ .*

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} X_t = \lim_{t \rightarrow 0} tB_{1/t} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} B_s$$

Az elnevezés magyarázata:

$B_n = B_1 + (B_2 - B_1) + \dots + (B_n - B_{n-1})$  független standard normálisok összege.

A Nagy Számok Erős Törvénye szerint  $\frac{1}{n} B_n \rightarrow \mathbb{E}(B_1) = 0$  egy valószínűséggel.

### Állítás (Emlékeztető: Időinverzió)

$B$  Brown mozgás,  $X_t = tB_{1/t}$ , ha  $t > 0$  és  $X_0 = 0$ . Ekkor  $X$  is Brown mozgás.

Jelölés:  $g = g(B) = \max\{t \leq 1 : B_t = 0\}$ , az 1 időpont előtti utolsó nullhely,  $d = d(B) = \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}$  az 1 időpont utáni első nullhely.

### Állítás

Ha  $B$  Brown mozgás, akkor  $g \stackrel{d}{=} 1/d$ .

- $g(B) \stackrel{d}{=} g(X)$ .
- $t \in (0, 1)$ -re

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(g(X) < t) &= \mathbb{P}(X\text{-nek nincs nullhelye } [t, 1]\text{-ben}) = \mathbb{P}(s \in [t, 1] \text{ esetén } B_{1/s} \neq 0) \\ &= \mathbb{P}(u = \frac{1}{s} \in [1, \frac{1}{t}] \text{ esetén } B_u \neq 0) = \mathbb{P}(d(B) > \frac{1}{t}) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{d(B)} < t\right).\end{aligned}$$

$$g \stackrel{d}{=} g(X) = 1/d(B).$$

Később kiszámoljuk, hogy  $d \stackrel{d}{=} 1 + Z_1^2/Z_2^2$ , ahol  $Z_1, Z_2$  független standard normálisok és így  $g \stackrel{d}{=} Z_2^2/(Z_1^2 + Z_2^2) \sim \text{Béta}(1/2, 1/2)$ . Ez az arkusz szinusz eloszlás.

$B$  Brown mozgás,  $\mu \neq 0$ ,  $(\mu t + B_t)_{t \geq 0}$  neve driftes Brown mozgás.

### Állítás

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu t + B_t = \begin{cases} \infty & \mu > 0 \\ -\infty & \mu < 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu t + B_t = \lim_{t \rightarrow \infty} t(\mu + \frac{1}{t} B_t) = \mu \infty$$

- Ha  $a > 0$  és  $\mu = -a$ , akkor  $B_t - at \rightarrow -\infty$  és  $\sup_{t \geq 0} B_t - at \geq 0$  (véges értékű) valószínűségi változó. Eloszlását később kiszámoljuk.
- $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t}$ . Később kiszámoljuk, hogy  $M$  martingál.  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = 0$ .  
pl. Ha a részvényár Black-Scholes modelljében  $S_t = e^{-\sigma^2 t/2 + \sigma B_t}$ , így  $S_t \rightarrow 0$ , ha  $t \rightarrow \infty$ .  
A martingál konvergencia tétel szerint nem negatív martingál egy valószínűséggel konvergens, így ez nem meglepő.

### Definíció

$(X_t)_{t \in [0,1]}$  Brown híd, ha  $X$  folytonos trajektóriájú Gauss folyamat és  $s, t \in [0, 1]$ -re  $\mathbb{E}(X_t) = 0$ ,  
 $\text{cov}(X_s, X_t) = \min(s, t) - st$ ,

Példa.  $B$  Brown mozgás,  $X_t = B_t - tB_1$ ,  $t \in [0, 1]$ . Ekkor  $X$  Brown híd.

$X$  folytonos trajektóriájú,  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_r})$  a  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_r}, B_1)$  normális vektorváltozó lineáris képe, ezért normális eloszlású és  $X$  Gauss folyamat.

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(B_t - tB_1) = 0,$$

$$\text{cov}(X_s, X_t) = \text{cov}(B_s, B_t) - t \text{cov}(B_s, B_1) - s \text{cov}(B_1, B_t) + st \text{cov}(B_1, B_1) = \min(s, t) - st.$$

### Állítás

$B$  Brown mozgás,  $X_t = B_t - tB_1$ ,  $t \in [0, 1]$ . Ekkor  $X$  független  $B_1$ -től.

Elég, hogy  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_r})$  független  $B_1$ -től, tetszőleges  $(t_1, \dots, t_r)$  választással.

$(X_{t_1}, \dots, X_{t_r}, B_1)$  normális vektorváltozó, emiatt a függetlenség a korrelálatlansággal ekvivalens.

$$\text{cov}(X_t, B_1) = \text{cov}(B_t - tB_1, B_1) = 0.$$

### Definíció

$(X_t)_{t \in [0,1]}$  Brown híd, ha  $X$  folytonos trajektóriájú Gauss folyamat és  $s, t \in [0, 1]$ -re  $\mathbb{E}(X_t) = 0$ ,  
 $\text{cov}(X_s, X_t) = \min(s, t) - st$ ,

- $B$  Brown mozgás, ekkor  $X_t = (1-t)B_{t/(1-t)}$ ,  $t \in [0, 1]$  és  $X_1 = 0$  definícióval  $X$  Brown híd.

$X$  Gauss folyamat  $[0, 1)$  folytonos.  $t = 1$ -ben is folytonos, mert

$$\lim_{t \nearrow 1} X_t = \lim_{t \nearrow 1} (1-t)B_{\frac{t}{1-t}} = \lim_{t \nearrow 1} t^{\frac{1-t}{t}} B_{\frac{t}{1-t}} = 0, \quad \text{ugyanis } s = \frac{t}{1-t} \rightarrow \infty \text{ és } \frac{1-t}{t} B_{\frac{t}{1-t}} = \frac{1}{s} B_s \rightarrow 0.$$

$\mathbb{E}(X_t), \text{cov}(X_s, X_t)$  HF.

- Az inverz transzformáció az  $X$  Brown-hídból Brown mozgást ad:  $B_s = (1+s)X_{s/(1+s)}$  Brown mozgás. HF.
- $a > 0$

$$\begin{aligned} \{\exists t \in [0, 1], X_t > a\} &= \{\exists t \in [0, 1), (1-t)B_{t/(1-t)} > a\} \\ &= \{\exists s \geq 0, \frac{1}{1+s}B_s > a\} = \{\exists s \geq 0, B_s - as > a\} = \{\sup_{s \geq 0} B_s - as > a\} \end{aligned}$$

Brown híd maximumának eloszlása megkapható a driftes Brown mozgás szuprénumának eloszlásából.

### Definíció (Emlékeztető)

$(B_t)_{t \geq 0}$  Brown mozgás, ha nullából induló, folytonos trajektóriájú, független növekményű folyamat, aminek növekményeire  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ , ha  $0 \leq s \leq t$ .

- $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_r = s < t$  mellett,  $(B_{s_1}, \dots, B_{s_r}, B_t - B_s)$  normális vektor.
- $((B_{s_1}, \dots, B_{s_r})$  és  $B_t - B_s$  korrelálatlanok, a normalitás miatt függetlenek is.
- $B_t - B_s$  független  $\mathcal{F}_s = \sigma(\{B_u : u \leq s\})$  minden „véges részétől”, vagyis  $\mathcal{F}_s$ -től.

Összefoglalva

### Állítás

Ha  $B$  Brown mozgás,  $0 \leq s \leq t$ ,  $\mathcal{F}_s = \sigma(\{B_u : u \leq s\})$ . Ekkor  $B_t - B_s$  független  $\mathcal{F}_s$ -től.

A jövőbeli növekmények függetlenek a múlttól.

## Definíció

$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  *filtráció*, ha minden  $t$ -re  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebra és  $0 \leq s \leq t$  esetén  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ . Röviden  $\sigma$ -algebrák bővülő családja.

$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  az  $(X_t)_{t \geq 0}$  *folyamat természetes filtrációja*, ha  $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s : s \leq t\})$ .

- $\mathcal{F}$  *filtráció*. Az  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebra reprezentálja a  $t$  időpontban „rendelkezésre álló információt”.
- Pl. ha  $\mathcal{F}$  a Brown mozgás természetes filtrációja, akkor az  $\mathcal{F}_t$ -beli események azok, amiknek a bekövetkezését el lehet dönteni ha a Brown mozgást  $t$ -ig figyeljük meg. Az  $\mathcal{F}_t$  mérhető változók azok, amiket ki lehet számítani a trajektória  $t$ -ig tartó darabjából.
- Példa.  $B$  Brown mozgás,  $\mathcal{F}$  a természetes filtrációja.

$$A = \{\max_{s \leq 2} B_s > 1\}, \quad A \in \mathcal{F}_2, \quad \text{de} \quad A \notin \mathcal{F}_1.$$

$A \cap \{\max_{s \leq 1} B_s < 1\}$ , bekövetkezése nem dönthető el az  $\mathcal{F}_1$ -beli információ alapján. Formális számolás kicsit később.

### Definíció (Emlékeztető)

$(B_t)_{t \geq 0}$  Brown mozgás, ha nullából induló, folytonos trajektóriájú, független növekményű folyamat, aminek növekményeire  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ , ha  $0 \leq s \leq t$ .

### Állítás

$B$  folyamat  $\mathcal{F}$  természetes filtrációval, azaz  $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_u : u \leq t\})$  minden  $t \geq 0$ -ra.

$B$  pontosan akkor Brown mozgás, ha nullából indul, folytonosak a trajektóriái és minden  $0 \leq s \leq t$ -re  $B_t - B_s$  független  $\mathcal{F}_s$ -től  $N(0, t - s)$  eloszlással.

- $\Rightarrow$ : ezt láttuk korábban.
- $\Leftarrow$ : csak a növekmények függetlenségét kell ellenőrizni.
- $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r$ ,  $X_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ ,  $k = 1, \dots, r$ :

$$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^r \{X_k \in H_k\}) = \mathbb{P}(\cap_{k=1}^{r-1} \{X_k \in H_k\}) \mathbb{P}(X_r \in H_r) = \dots = \prod_{k=1}^r \mathbb{P}(X_k \in H_k),$$

mert  $X_1, \dots, X_{r-1}$   $\mathcal{F}_{t_{r-1}}$  mérhető és  $X_r = B_{t_r} - B_{t_{r-1}}$  ettől független a feltevés szerint ( $s = t_{r-1}$ ,  $t = t_r$ ).

### Definíció

A  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  folyamat **Brown mozgás** az  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  **filtrációban**, ha

- $B$  nullából induló, folytonos trajektóriájú folyamat.
  - minden  $t \geq 0$ -ra, a  $B_t$  változó mérhető az  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebrára, röviden:  $B$  adaptált az  $\mathcal{F}$  filtrációhoz.
  - minden  $0 \leq s \leq t$ -re,  $B_t - B_s$  az  $\mathcal{F}_s$   $\sigma$ -algebrától független  $N(0, t - s)$  eloszlású változó.
- 
- $B$  pontosan akkor Brown mozgás a természetes filtrációjában, ha Brown mozgás a korábbi definíció értelmében.
  - Legyen  $B$  Brown mozgás az  $\mathcal{F}$  filtrációban. Ekkor  $B_s \sim \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  minden  $0 \leq s \leq t$  és  $\sigma(\{B_s : s \leq t\}) \subset \mathcal{F}_t$  minden  $t \geq 0$ -re. Röviden  $\mathcal{F}$  „bővebb”, mint  $B$  természetes filtrációja.  
 $B$  Brown mozgás a természetes filtrációjában is. (adaptáltság és függetlenség).  
 $B$  Brown mozgás a korábbi definíció szerint is.
  - $B$  Brown mozgás a természetes filtrációjában,  $\mathcal{F}$  ennél bővebb filtráció. Ekkor  $B$  nem feltétlenül Brown mozgás  $\mathcal{F}$ -ben, mert a növekmény múlttól való függetlensége elromolhat.  
pl.  $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_1, B_u : u \leq t\})$ . Ekkor  $B_1 - B_0 = B_1$  nem független  $\mathcal{F}_0 = \sigma(B_1, B_0)$ -től.

### Definíció (Emlékeztő)

$B$  Brown mozgás a  $\mathcal{F}$  filtrációban, ha nullából induló, folytonos trajektóriájú,  $\mathcal{F}$ -adaptált folyamat és ha  $0 \leq s \leq t$ , akkor  $\mathcal{F}_s \perp B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ .

### Állítás

Ha  $B$  Brown mozgás az  $\mathcal{F}$  filtrációban, akkor  $B$  független az  $\mathcal{F}_0$   $\sigma$ -algebrától.

- Kell:  $B_{t_1}, \dots, B_{t_r}$  független  $\mathcal{F}_0$ -tól, minden  $0 \leq t_1 < \dots < t_r$  választás mellett.
- $\sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_r}) = \sigma(X_1 = B_{t_1} - B_0, \dots, X_r = B_{t_r} - B_{t_{r-1}})$  ezért elég, hogy a növekmények  $(X_1, \dots, X_r)$  függetlenek  $\mathcal{F}_0$ -tól.
- $A \in \mathcal{F}_0, H_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1, \dots, r$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap \cap_{i=1}^r \{X_i \in H_i\}) &= \mathbb{P}(A \cap \cap_{i=1}^{r-1} \{X_i \in H_i\}) \mathbb{P}(X_r \in H_r) \\ &= \dots = \mathbb{P}(A) \prod \mathbb{P}(X_i \in H_i) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(\cap_i \{X_i \in H_i\})\end{aligned}$$

- Azaz tetszőleges  $A \in \mathcal{F}_0$  esemény független tetszőleges  $C \in \mathcal{C} = \{\cap_i \{X_i \in H_i\} : H_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$  eseménytől.
- $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(X_1, \dots, X_r) = \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_r})$  független  $\mathcal{F}_0$ -tól.

### Definíció (Emlékeztető)

$B$  Brown mozgás a  $\mathcal{F}$  filtrációban, ha nullából induló, folytonos trajektóriájú,  $\mathcal{F}$ -adaptált folyamat és ha  $0 \leq s \leq t$ , akkor  $\mathcal{F}_s \perp B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ .

### Tétel (Brown mozgás Markov tulajdonsága)

$B$  Brown mozgás az  $\mathcal{F}$  filtrációban,  $T \geq 0$  rögzített.  $X_t = B_{t+T} - B_T$ ,  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{T+t}$ ,  $t \geq 0$ . Ekkor  $X$  Brown mozgás  $\mathcal{G}$ -ben, speciálisan  $X$  független a  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_T$   $\sigma$ -algebrától.

„Egy Brown mozgás, minden determinisztikus időpontban a múltjától függetlenül újraindul”.

- $X$  nullából induló, folytonos trajektóriájú folyamat.
- $X_t = B_{T+t} - B_T \sim \mathcal{F}_{T+t} = \mathcal{G}_t$ , azaz  $X$  adaptált a  $\mathcal{G}$  filtrációhoz.
- $0 \leq s \leq t$  esetén  $X_t - X_s = (B_{T+t} - B_T) - (B_{T+s} - B_T) = B_{T+t} - B_{T+s}$  független  $\mathcal{F}_{T+s} = \mathcal{G}_s$ -től.
- $X$  Brown mozgás a  $\mathcal{G}$  filtrációban, ezért független  $\mathcal{G}_0$ -tól.

### Állítás

$A$  esemény  $X$   $r$ -dimenziós vektorváltozó.

$X$  pontosan akkor független  $A$ -tól, ha  $\mathbb{E}(e^{i\alpha \cdot X} \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(e^{i\alpha \cdot X})\mathbb{P}(A)$  minden  $\alpha \in \mathbb{R}^d$ -re.

Ha  $X$  feltételes karakterisztikus függvénye megegyezik a feltétel nélkülivel, akkor  $X$  független a feltételtől.

- $\mathbb{P}(A) > 0$  mellett legyen  $Q(C) = \mathbb{P}(C | A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_C Z)$ , ahol  $Z = \frac{\mathbb{1}_A}{\mathbb{P}(A)}$ .
- $\mathbb{E}_Q(Y) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(YZ)$ .
- A feltétel szerint  $\varphi_X^Q = \varphi_X^{\mathbb{P}}$ .
- A karakterisztikus függvény meghatározza az eloszlást, azaz  $Q(X \in H) = \mathbb{P}(X \in H)$  tetszőleges  $H$ -ra.

Kiírva:

$$Q(X \in H) = \mathbb{P}(X \in H | A) = \frac{\mathbb{P}(X \in H, A)}{\mathbb{P}(A)}, \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(X \in H)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \in H, A)$$

$X$  és  $A$  függetlenek.

- Ha  $\mathbb{P}(A) = 0$ , akkor  $A$  mindentől független, pl.  $X$ -től is.

### Állítás

$B$  Brown mozgás  $\mathcal{F}$ -ben. Ekkor  $B$  független az  $\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s$   $\sigma$ -algebrától.

- $A \in \mathcal{F}_{0+}$  tetszőleges,  $X^{(n)}$  a  $T = 1/n$  időpontban újrainduló Brown mozgás.
- $A \in \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{1/n}$  ezért  $A$  független az  $X^{(n)}$  folyamattól.
- Legyen  $0 \leq t_1 < \dots < t_r$  rögzített,  $Y^{(0)} = (B_{t_1}, \dots, B_{t_r})$  és  $Y^{(n)} = (X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_r}^{(n)})$ .
- $Y^{(n)}$  független  $A$ -tól, azaz

$$\mathbb{E}(e^{i\alpha Y^{(n)}} \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(e^{i\alpha Y^{(n)}}) \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(e^{i\alpha Y^{(0)}}) \mathbb{P}(A)$$

az utolsó lépésben azt használtuk, hogy  $X^{(n)}$  és  $B$  is Brown mozgások, vagyis a véges dimenziós eloszlások azonosak.

- $X_t^{(n)} = B_{t+1/n} - B_{1/n} \rightarrow B_t$  ha  $n \rightarrow \infty$  és  $Y^{(n)} \rightarrow Y^{(0)}$  egy valószínűséggel.

$$\mathbb{E}(e^{i\alpha Y^{(0)}}) \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(e^{i\alpha Y^{(n)}} \mathbb{1}_A) \rightarrow \mathbb{E}(e^{i\alpha Y^{(0)}} \mathbb{1}_A)$$

a dominált konvergencia tétel szerint.

- $B$  véges dimenziós vetületei függetlenek tetszőleges  $A \in \mathcal{F}_{0+}$ -től, azaz a  $B$  folyamat független az  $\mathcal{F}_{0+}$   $\sigma$ -algebrától.

Igazából azt ellenőriztük, hogy a függetlenség limesznél megmarad.

## Tétel

$B$  Brown mozgás,  $\mathcal{F}$  a  $B$  természetes filtrációja,  $A \in \mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s$ . Ekkor  $\mathbb{P}(A)$  vagy nulla vagy egy.

$A \in \mathcal{F}_{0+} \subset \sigma(B)$  és  $B$  független  $\mathcal{F}_{0+}$ -tól. Azaz  $A$  független önmagától és  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A)$ , vagyis  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ .

## Megjegyzések

- $\mathcal{F}_{0+}$ -ban olyan események vannak, amiknek a bekövetkezését el lehet dönteni, ha tetszőlegesen kicsi pozitív  $s$ -re ismerjük a folyamat értékeit  $[0, s]$ -en.

Példa.

$$A = \{B \text{ a nullához tetszőlegesen közel jár a pozitív oldalon}\}$$

- Ha  $\mathcal{F}$  nem a természetes filtráció, akkor ilyen állítás nem igaz.

Példa.  $B$  Brown mozgás (a természetes filtrációjában),  $U$   $B$ -től független  $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású.

$\mathcal{F}_t = \sigma(\{U, B_s : s \leq t\})$ . Ekkor  $\mathcal{F}_0 = \sigma(U)$  nem triviális és  $B$  Brown mozgás  $\mathcal{F}$ -ben (HF).

$B$  Brown mozgás,  $\mathcal{F}$  a természetes filtrációja,  $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s : s \in [0, t]\}$ .

- $A_n = \{\text{van olyan } t \in [0, 1/n], \text{ hogy } B_t > 0\}$ . Ekkor  $A_n \in \mathcal{F}_{1/n}$  és  $\mathbb{P}(A_n) \geq \mathbb{P}(B_1/n > 0) = 1/2$ .
- $A_{n+1} \subset A_n$  és

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_{1/k}, \quad \text{minden } k \geq 1\text{-re}$$

- $A = \{B \text{ minden } \delta > 0\text{-ra, a } (0, \delta)\text{-ban jár a pozitív oldalon}\} = \bigcap_n A_n \in \mathcal{F}_s \text{ minden } s > 0, \text{ azaz } A \in \mathcal{F}_{0+}.$
- $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ , és

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \geq \frac{1}{2}, \quad \implies \mathbb{P}(A) = 1$$

- Ez a gondolatmenet  $-B$ -re is igaz,  $\mathbb{P}(\forall \delta > 0, \exists 0 \leq t \leq \delta, B_t < 0) = 1$ .

### Állítás (Összefoglalva)

$B$  Brown mozgás.  $\mathbb{P}(B \text{ előjelet vált } [0, \delta]\text{-ban tetszőleges kicsi } \delta\text{-ra}) = 1$ .

Brown mozgás helyett driftes Brown mozgásra is igaz az állítás.

Black-Scholes modellben  $S_t = \exp\{-\sigma^2 t/2 + \sigma B_t\}$ ,  $t \geq 0$ , nincs értelme arról beszélni, hogy a részvényár felfelé vagy lefelé indul el.

$B$  Brown mozgás.  $m_c = \inf\{t \geq 0 : B_t = c\}$  a  $c$  szint első elérési ideje. Korábban láttuk, hogy  $c \neq 0$  esetén

$$\mathbb{P}(m_c < \infty) = \mathbb{P}(B \text{ jár a pozitív oldalón}) \geq \mathbb{P}(B \text{ a nulla közelében előjelet vált}) = 1.$$

Több is igaz.

### Állítás

$B$  Brown mozgás.  $\mathbb{P}(B \text{ minden szintet meglátogat}) = 1.$

$\mathbb{P}(m_c < \infty) = 1$ , azaz  $\mathbb{P}(m_c = \infty) = 0$  minden  $c$ -re.

$$\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{Z}} \{B \text{ nem éri el az } n \text{ szintet}\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(m_n = \infty) = 0.$$