

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.02.12.

- Tematika, irodalomjegyzék az előadás Canvas oldalán.
- Számonkérés: szóbeli vizsga, a vizsgaidőszak elején lesz egy írásbeli vizsga, amin legfeljebb középest lehet szerezni.
- A slide-ok az előadás Canvas oldalán elérhetőek lesznek az óra előtt.

- Sztochasztikus kalkulus, azaz integrál (alkalmas) folyamat szerint
- Itô formula
- Mértékcseré (Girsanov tétel, Novikov feltétel)
- Sztochasztikus differenciál egyenletek (inkább integrál egyenletek)

Legtöbbet a Brown-mozgással, más néven Wiener-folyamattal fogunk foglalkozni.

- 1827 Brown angol botanikus. Mikroszkóp alatt vizsgálja pollenszemek mozgását.

Brown, R. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, *Edinburgh new Philosophical Journal*, 1828, 4, 358–371

- 1900 Bachelier a párizsi tőzsde adatainak leírására javasolja a Brown mozgást.
- 1905-06 Einstein oldatok vizsgálata. Kapcsolatot ad mérhető mennyiségek (viszkozitás) és az Avogadro szám között. Ebből közelítést tud adni az Avogadro számra.
- 1920-as évek. Wiener matematikai konstrukciót ad a Brown mozgásra:

$$B_t = Z_0 t + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi t}{n\pi} Z_n, \quad t \in [0, 1]$$

ahol $Z_0, Z_1, \dots$ független standard normálisok.

- Δt nagyon kicsi (végtelenül kicsi)
- B értéke Δt időközönként változik, $\pm\sqrt{\Delta t}$ -t, az egyes lépések egymástól függetlenek és $1/2$ valószínűséggel $\sqrt{\Delta t}$, $1/2$ valószínűséggel $-\sqrt{\Delta t}$ a nagyságuk.
- Brown mozgás olyan, mint egy szimmetrikus bolyongás a $\sqrt{\Delta t}\mathbb{Z}$ rácson, ahol a lépések Δt időközönként történnek.

Következmények:

- Ha Δt kicsi, akkor $B_t - B_s$ eloszlása közel van $N(0, t - s)$ -hez.
- Sőt ha $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, akkor $\{B_{t_k} - B_{t_{k-1}} : k = 1, \dots, n\}$ függetlenek.

Miért kell külön sztochasztikus kalkulus?

- B szimmetrikus bolyongás az $\sqrt{\Delta t}\mathbb{Z}$ rácson, lépések Δt időközönként.
- f szép függvény, pl. kétszer folytonosan differenciálható.
- $B_{(k+1)\Delta t} - B_{k\Delta t} \in \{\pm\sqrt{\Delta t}\}$.
- Diszkrét Itô formula

$$\begin{aligned} f(B_{(k+1)\Delta t}) - f(B_{k\Delta t}) &= \frac{f(B_{k\Delta t} + \sqrt{\Delta t}) - f(B_{k\Delta t} - \sqrt{\Delta t})}{2\sqrt{\Delta t}} (B_{(k+1)\Delta t} - B_{k\Delta t}) + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{f(B_{k\Delta t} + \sqrt{\Delta t}) + f(B_{k\Delta t} - \sqrt{\Delta t}) - 2f(B_{k\Delta t})}{(\sqrt{\Delta t})^2} (B_{(k+1)\Delta t} - B_{k\Delta t})^2 \end{aligned}$$

Egyszerűsített alak $g(i) = f(B_{k\Delta t} + i\sqrt{\Delta t})$, $i = -1, 0, 1$,

$$g(j) - g(0) = \frac{g(1) - g(-1)}{2} \text{sign}(j) + \frac{1}{2}(g(1) + g(-1) - 2g(0)), \quad j = -1, 1$$

- Összegzés és $\Delta t \rightarrow 0$ után

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds$$

Miért kell külön sztochasztikus kalkulus?

- B szimmetrikus bolyongás az $\sqrt{\Delta t}\mathbb{Z}$ rácson, lépések Δt időközönként.
- f szép függvény, pl. kétszer folytonosan differenciálható.
- $B_{(k+1)\Delta t} - B_{k\Delta t} \in \{\pm\sqrt{\Delta t}\}$.
- Diszkrét Itô formula

$$\begin{aligned} f(B_{(k+1)\Delta t}) - f(B_{k\Delta t}) &= \frac{f(B_{k\Delta t} + \sqrt{\Delta t}) - f(B_{k\Delta t} - \sqrt{\Delta t})}{2\sqrt{\Delta t}} (B_{(k+1)\Delta t} - B_{k\Delta t}) + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{f(B_{k\Delta t} + \sqrt{\Delta t}) + f(B_{k\Delta t} - \sqrt{\Delta t}) - 2f(B_{k\Delta t})}{(\sqrt{\Delta t})^2} \Delta t \end{aligned}$$

- Összegzés és $\Delta t \rightarrow 0$ után

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

- Ha h folytonosan deriválható, akkor $f \circ h$ is az és

$$f(h(t)) = f(h(0)) + \int_0^t f'(h(s)) h'(s) ds = f(h(0)) + \int_0^t f'(h(s)) dh(s)$$

- Az várható, hogy a sztochasztikus kalkulusban megjelenik egy plusz tag, ami a növekmények négyzetösszegének a hatása.

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező.

- $X = (X_t)_{t \geq 0}$ valószínűségi változók paraméterezett családja, azaz **(sztochasztikus) folyamat**.
Más szóval $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
- X_t a folyamat értéke a t időpontban. Ez valószínűségi változó.
Ugyanaz a különbség, mint a $\cos$ függvény és $\cos \alpha$ valós szám között.
- Rögzített $\omega \in \Omega$ mellett a $t \mapsto X_t(\omega)$ függvény az X **folyamat trajektóriája**.
- Az X folyamat **folytonos trajektóriájú**, ha trajektóriái folytonosak majdnem minden ω -ra, azaz egy valószínűséggel.

Később kicsit általánosabban is megadjuk

Definíció

$B = (B_t)_{t \geq 0}$ Brown mozgás, ha

- $B_0 = 0$, azaz nullából indul,
- B folytonos trajektóriájú,
- B független növekményű, azaz $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r$ esetén a

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_r} - B_{t_{r-1}}$$

változók függetlenek.

- $t > s$ esetén $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$, azaz $B_t - B_s$ normális eloszlású, nulla várható értékkel és $t - s$ szórásnégyzettel.

- $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ eseményrendszerek függetlenek, ha $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$ minden $C \in \mathcal{C}$ és $D \in \mathcal{D}$ esetén.
- $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ σ -algebrák függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i), \quad \text{tetszőleges } A_i \in \mathcal{A}_i \text{ választás mellett.}$$

Pl. $\mathcal{C} = \sigma(C) = \{C, C^c, \Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{D} = \sigma(D) = \{D, D^c, \Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ pontosan akkor független, ha a C és D események függetlenek.

- X valószínűségi változó. Az X -szel kapcsolatban megfogalmazható események σ -algebrája:
 $\sigma(X) = \{\{X \in H\} : H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.
- $X_1, \dots, X_n$ valószínűségi változók függetlenek, ha a generált σ -algebrák függetlenek, azaz

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n \{X_i \in H_i\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in H_i), \quad \text{tetszőleges } H_1, \dots, H_n \text{ Borel halmazokra.}$$

Definíció

- $X = (X_t)_{t \geq 0}$ folyamattal kapcsolatban megfogalmazható események rendszere, azaz az X által generált σ -algebra: $\sigma(X) = \sigma\{X_t : t \geq 0\}$.
- X folyamat független egy $\mathcal{A}$ σ -algebrától, ha $\sigma(X)$ független $\mathcal{A}$ -tól.

Tétel (biz. nélkül)

$\mathcal{A}$ σ -algebra és $\mathcal{C}$ metszetzárt és $\mathcal{C}$ független $\mathcal{A}$ -tól, akkor $\sigma(\mathcal{C})$ független $\mathcal{A}$ -tól.

Pl. Ha X valószínűségi változó, akkor $X \perp \mathcal{A}$ -hoz elég, hogy $\{X < c\} \perp \mathcal{A}$ minden $c \in \mathbb{R}$ -re.

Tétel (biz. nélkül)

Az X folyamat pontosan akkor független a $\mathcal{A}$ σ -algebrától, ha minden véges része az, azaz $\sigma\{X_t : t \in F\}$ független $\mathcal{A}$ -tól, tetszőleges $F \subset [0, \infty)$ véges halmazra.

Kicsit általánosabban: $\sigma\{X_t : t \in I\} \perp \mathcal{A} \iff \sigma\{X_t : t \in F\} \perp \mathcal{A}$ minden véges $F \subset I$ indexhalmazra.

- B folytonos trajektóriájú folyamat, pl. Brown mozgás, U valószínűségi változó.
- B független U -tól azt jelenti, hogy minden B -vel kapcsolatban megfogalmazott esemény független tetszőleges U -val megfogalmazott eseménytől.
- $C = \{\max_{s \leq 1} B_s > 1\} = \cup_{q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \{B_q > 1\}$, B -vel kapcsolatos esemény,
- $D = \{U < 1/2\} \in \sigma(U)$.
- C, D függetlenségéhez, elég hogy $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ független U -tól, tetszőleges $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ választással.

Definíció

- Z standard normális eloszlású, ha létezik sűrűségfüggvénye és $f_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$.
- X 1-dimenziós normális, ha valamilyen $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ számokra $X \stackrel{d}{=} \mu + \sigma Z$, ahol Z standard normális.
Jelölés: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- Normális eloszlás a centrális határeloszlás tétel (CHT) miatt fontos. A CHT következménye, hogy független növekményű, folytonos trajektóriájú folyamat (pl. Brown mozgás) növekményei normális eloszlásúak.
- $\sigma = 0$ is lehet. Ha $X \sim N(\mu, 0)$, akkor $\mathbb{P}(X = \mu) = 1$, vagyis az elfajult eloszlás is normális!
- $\sigma > 0$ esetén létezik sűrűségfüggvény: ha $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, akkor $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ és

$$f_X(t) = f_Z\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$

Lemma

$Z \sim N(0, 1)$, $g \in C^1$ és $\mathbb{E}(|g'(Z)|) < \infty$, $\mathbb{E}(|Zg(Z)|) < \infty$. Ekkor

$$\mathbb{E}(g'(Z)) = \mathbb{E}(Zg(Z))$$

- $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$ a standard normális sűrűségfüggvény. $f'(t) = -tf(t)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g'(Z)\mathbb{1}_{(a < Z < b)}) &= \int_{[a,b]} g'(t)f_Z(t)dt = [g(t)f(t)]_a^b - \int_{[a,b]} g(t)f'(t)dt \\ &= [g(t)f(t)]_a^b + \int_{[a,b]} g(t)tf(t)dt = [g(t)f(t)]_a^b + \mathbb{E}(Zg(Z)\mathbb{1}_{(a < Z < b)})\end{aligned}$$

- Kell: létezik $a_n \rightarrow -\infty$, $b_n \rightarrow \infty$, hogy $(fg)(a_n), (fg)(b_n) \rightarrow 0$.

$$\mathbb{E}(|g(Z)|\mathbb{1}_{(|Z|>1)}) \leq \mathbb{E}(|Zg(Z)|) < \infty, \quad \implies \quad \mathbb{E}(|g(Z)|) < \infty$$

és

$$\mathbb{E}(|g(Z)|) = \int |g(t)|f(t)dt < \infty \quad \implies \quad \liminf_{t \rightarrow \pm\infty} |g(t)|f(t) = 0 \quad \text{ellenkező esetben az integrál } +\infty.$$

Lemma (Parciális integrálás formulája $N(0, 1)$ -re)

$Z \sim N(0, 1)$, $g \in C^1$ és $\mathbb{E}(|g'(Z)|) < \infty$, $\mathbb{E}(|Zg(Z)|) < \infty$. Ekkor $\mathbb{E}(Zg(Z)) = \mathbb{E}(g'(Z))$

$Z \sim N(0, 1)$

- $g(t) = 1$: $\mathbb{E}(Zg(Z)) = \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g'(Z)) = 0$.
- $g(t) = t$: $\mathbb{E}(Zg(Z)) = \mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(g'(Z)) = \mathbb{E}(1) = 1$.
- $X \stackrel{d}{=} \mu + \sigma Z$, akkor $\mathbb{E}(X) = \mu$ és $\mathbb{D}^2(X) = \sigma^2$.
 $N(\mu, \sigma^2)$ paraméterei: μ a várható érték, σ^2 a szórásnégyzet.
- $g(t) = \sin(\alpha t)$, $\mathbb{E}(Z \sin(\alpha Z)) = \alpha \mathbb{E}(\cos(\alpha Z))$.

HF.

- Alkalmas feltételek mellett $\mathbb{E}((Z^2 - 1)g(Z)) = \mathbb{E}(g''(Z))$,
- $h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} (e^{-\frac{1}{2}x^2})^{(n)}$ az n . Hermite polinom.
 Ekkor „szép” g -kre $\mathbb{E}(h_n(Z)g(Z)) = \mathbb{E}(g^{(n)}(Z))$.
- „szép” g -re, $g(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(g^{(n)}(Z)) \frac{h_n(Z)}{n!}$. A sor $L^2(\Omega)$ -ban konvergens.

Definíció

X d -dimenziós vektor változó,

$$\varphi_X: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_X(\alpha) = \mathbb{E}(e^{i\alpha X}) = \mathbb{E}(\cos(\alpha X)) + i\mathbb{E}(\sin(\alpha X)),$$

X karakterisztikus függvénye. Itt i a képzetes egység, $i^2 = -1$, $\alpha X = \sum_j \alpha_j X_j$.

- φ_X meghatározza X eloszlását, pl. ha $\mathbb{P}(X_j \in \{a_j, b_j\}) = 0$ minden j -re

$$\mathbb{P}(X \in \times_j (a_j, b_j)) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\times_j (a_j, b_j)} e^{-i\alpha x} dx \varphi_X(\alpha) e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 |\alpha|^2} d\alpha.$$

- Ha $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, akkor φ_X deriválható és $\varphi'_X(\alpha) = \mathbb{E}(iX e^{i\alpha X})$.

- Z standard normális változó (1 dimenziós).

$$\varphi_Z(\alpha) = \mathbb{E}(e^{i\alpha Z}) = \mathbb{E}(\cos(\alpha Z)) + i\mathbb{E}(\sin(\alpha Z)) = \mathbb{E}(\cos(\alpha Z)),$$

$$\varphi'_Z(\alpha) = \mathbb{E}(iZe^{i\alpha Z}) = \mathbb{E}(iZ\cos(\alpha Z)) - \mathbb{E}(Z\sin(\alpha Z)) = -\mathbb{E}(Z\sin(\alpha Z)).$$

- Parciális integrálás formulája $\mathbb{E}(Zg(Z)) = \mathbb{E}(g'(Z))$ alapján $g(t) = \sin(\alpha t)$ választással

$$\varphi'_Z(\alpha) = -\mathbb{E}(Z\sin(\alpha Z)) = -\alpha\mathbb{E}(\cos(\alpha Z)) = -\alpha\varphi_Z(\alpha).$$

- $\varphi_Z(0) = 1$.

$$(e^{\alpha^2/2}\varphi_Z(\alpha))' = e^{\alpha^2/2}(\alpha\varphi_Z(\alpha) + \varphi'_Z(\alpha)) = 0$$

- $\varphi_Z(\alpha) = e^{-\alpha^2/2}$

- Z standard normális változó (1 dimenziós). $\varphi_Z(\alpha) = e^{-\alpha^2/2}$
- Ha $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, akkor $X \stackrel{d}{=} \mu + \sigma Z$ és

$$\varphi_X(\alpha) = \mathbb{E}(e^{i\alpha(\mu + \sigma Z)}) = e^{i\alpha\mu} \varphi_Z(\alpha\sigma) = e^{i\alpha\mu - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2}$$

Következmény

$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ független normálisok, ekkor $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$

$$\varphi_{X+Y}(\alpha) = \mathbb{E}(e^{i\alpha(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{i\alpha X} e^{i\alpha Y}) = \varphi_X(\alpha) \varphi_Y(\alpha) = e^{i\alpha(\mu_X + \mu_Y) - \frac{1}{2}\alpha^2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}$$

ami az $N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$ eloszlás karakterisztikus függvénye.

Következmény

Független egy dimenziós normális változók összege normális eloszlású, a várható értékek és a szórásnégyzetek összeadódnak.

Definíció

X d -dimenziós vektor változó. X normális eloszlású, ha minden $a \in \mathbb{R}^d$ együttható vektorra $a^T X = \sum_j a_j X_j$ egy dimenziós normális változó.

Példák

- Ha $X_1, \dots, X_d$ független egy dimenziós normálisok, akkor $X = (X_1, \dots, X_d)$ normális vektor változó. Ugyanis $a \in \mathbb{R}^d$ -re $a_1 X_1, \dots, a_d X_d$ független normálisok, és így $\sum_j a_j X_j$ is egy dimenziós normális.
- $Z \sim N(0, 1)$, ε tőle független előjel $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$. $X_1 = Z$, $X_2 = \varepsilon Z$.
- $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_2 \sim N(0, 1)$.

$$\mathbb{P}(X_2 \in H) = \mathbb{P}(X_2 \in H, \varepsilon = 1) + \mathbb{P}(X_2 \in H, \varepsilon = -1) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(Z \in H) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(-Z \in H) = \mathbb{P}(Z \in H)$$

- $X_1 + X_2 = Z(1 + \varepsilon)$ nem normális eloszlású. $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 0) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$ nincs sűrűségfüggvény, de $X_1 + X_2$ nem is konstans nulla.
- $(X_1, \dots, X_d)$ normális vektorváltozó több annál, hogy a koordináták normálisak.

- $X = (X_1, \dots, X_d)$ normális vektorváltozó. Ekkor $X_j, j = 1, \dots, d$ egy dimenziós normálisok (négyzetesen integrálhatóak) és $\mathbb{E}(X_k) = \mu_k, \Sigma_{k,\ell} = \text{cov}(X_k, X_\ell)$ véges.
 $\mu \in \mathbb{R}^d$ a várható érték vektor és $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ a kovariancia mátrix.
- $\alpha \in \mathbb{R}^d$, ekkor αX egy dimenziós normális,

$$\mathbb{E}(\alpha X) = \sum_k \alpha_k \mathbb{E}(X_k) = \alpha \mu, \quad \mathbb{D}^2(\alpha X) = \text{cov}\left(\sum_k \alpha_k X_k, \sum_\ell \alpha_\ell X_\ell\right) = \sum_{k,\ell} \alpha_k \alpha_\ell \Sigma_{k,\ell} = \alpha^T \Sigma \alpha.$$

•

$$\varphi_X(\alpha) = \mathbb{E}(e^{i\alpha X}) = \varphi_{\alpha X}(1) = e^{i\alpha\mu - \frac{1}{2}\alpha^T \Sigma \alpha}$$

Azaz normális vektorváltozó eloszlását a várható érték vektor μ és a kovariancia mátrix Σ meghatározza.
Jelölés: $N(\mu, \Sigma)$.

- Példa. $X_1, \dots, X_d$ független standard normálisok. $X = (X_1, \dots, X_d)$ normális vektorváltozó, $\mathbb{E}(X) = 0$, $\Sigma(X) = I_d$
Ezt szokás d -dimenziós standard normálisnak hívni.

Normális eloszlás tulajdonságai I.

Állítás

X normális vektorváltozó, μ , A megfelelő méretű vektor ill. mátrix. Ekkor $Y = \mu + AX$ normális vektorváltozó, $Y \sim N(\mu + A\mathbb{E}(X), A\Sigma(X)A^T)$.

Ha X p dimenziós, akkor A $q \times p$ és μ q dimenziós.

a együttható vektorra

$$a^TY = a^T\mu + a^TAX = a^T\mu + (A^Ta)^TX$$

ami egy dimenziós normális.

$$\mathbb{E}(Y) = \mu + \mathbb{E}(AX) = \mu + A\mathbb{E}(X),$$

$$\Sigma(Y) = \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))^T) = \mathbb{E}(A(X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^TA^T) = A\Sigma(X)A^T.$$

X normális vektorváltozó. $\Sigma(X)$ pozitív szemidefinit mátrix, így felbontható AA^T alakban, pl. Cholesky felbontással.

Következmény

$X \sim N(\mu, \Sigma)$ d -dimenziós normális, $\Sigma = AA^T$, $Z \sim N(0, I_d)$ d -dimenziós standard normális. Ekkor

$$X \stackrel{d}{=} \mu + AZ$$

Állítás

$X \sim N(\mu, \Sigma)$ d -dimenziós normális, $\Sigma = AA^T$, $Z \sim N(0, I_d)$. Ekkor $X \stackrel{d}{=} \mu + AZ$.

Állítás

X_1, X_2 vektorváltozók, $X = (X_1, X_2)$ normális eloszlású. Ha $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$ (azaz X_1 mindegyik koordinátája korrelálatlan X_2 koordinátáitól), akkor X_1 és X_2 függetlenek.

- $\mu_i = \mathbb{E}(X_i)$, ekkor $\mathbb{E}(X) = (\mu_1, \mu_2)$.
- A korrelálatlanság miatt $\Sigma(X)$ diagonális blokkmátrix

$$\Sigma(X) = \begin{pmatrix} \Sigma(X_1) & 0 \\ 0 & \Sigma(X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^T & 0 \\ 0 & A_2^T \end{pmatrix}$$

Azaz ha $Z = (Z_1, Z_2)$ standard normális vektorváltozók (X -szel egyező dimenzióval), akkor

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} \mu_1 + A_1 Z_1 \\ \mu_2 + A_2 Z_2 \end{pmatrix}$$

és X_1, X_2 függetlenek.