

1. feladat: Milyen mérethozadékú?

$$Y = 7,65K + 3,45L$$

$$Y = 4,87K^{0,28}L^{0,28}$$

$$Y = 1,06K^{0,34}L^{0,66}$$

$$Y = \min\{0,34K; 3,12L\}$$

$$Y = 7,54K^{0,28}L^{2,13}$$

$$Y = \frac{L^2}{K}$$

Megoldás:

$$Y = 7,65K + 3,45L \rightarrow \text{konstans}$$

$$Y = 4,87K^{0,28}L^{0,28} \rightarrow \text{csökkenő}$$

$$Y = 1,06K^{0,34}L^{0,66} \rightarrow \text{konstans}$$

$$Y = \min\{0,34K; 3,12L\} \rightarrow \text{konstans}$$

$$Y = 7,54K^{0,28}L^{2,13} \rightarrow \text{növekvő}$$

$$Y = \frac{L^2}{K} \rightarrow \text{konstans}$$

2. feladat: Egészítsük ki a táblázatot!

$f(K,L)$	L^S	K^S	L^D	w^*	Y
$Y = 2,34K^{0,22}L^{0,78}$	5,67	82,34			
$Y = 4,12K^{0,18}L^{0,82}$	23,23	81,46			
$Y = 1,09K^{0,41}L^{0,59}$	8,92	55,34			

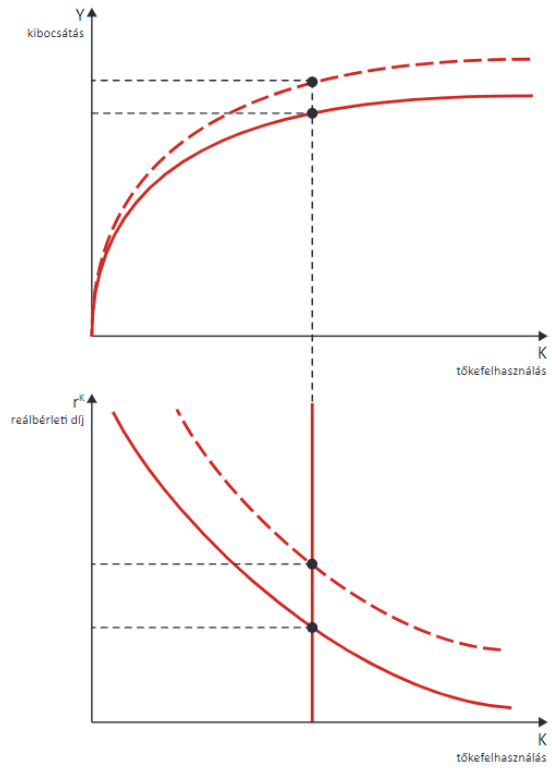
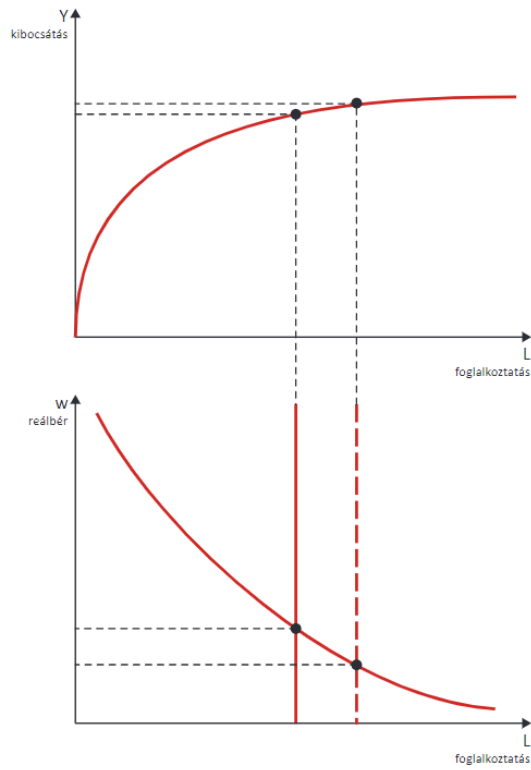
$f(K,L)$	L^S	K^S	K^D	r^{K*}	Y
$Y = 1,72K^{0,21}L^{0,79}$	7,09	61,34			
$Y = 1,75K^{0,26}L^{0,74}$	12,97	34,27			
$Y = 7,91K^{0,29}L^{0,71}$	8,09	19,76			

Megoldás:

$f(K,L)$	L^S	K^S	L^D	w^*	Y
$Y = 2,34K^{0,22}L^{0,78}$	5,67	82,34	$L^D = 0,78 \frac{Y}{w}$	3,288187522	23,90259391
$Y = 4,12K^{0,18}L^{0,82}$	23,23	81,46	$L^D = 0,82 \frac{Y}{w}$	4,234403146	119,9575428
$Y = 1,09K^{0,41}L^{0,59}$	8,92	55,34	$L^D = 0,59 \frac{Y}{w}$	1,359173733	20,54886389

$f(K,L)$	L^S	K^S	K^D	r^{K*}	Y
$Y = 1,72K^{0,21}L^{0,79}$	7,09	61,34	$K^D = 0,21 \frac{Y}{r^K}$	0,065681141	19,18514848
$Y = 1,75K^{0,26}L^{0,74}$	12,97	34,27	$K^D = 0,26 \frac{Y}{r^K}$	0,221682266	29,22074593
$Y = 7,91K^{0,29}L^{0,71}$	8,09	19,76	$K^D = 0,29 \frac{Y}{r^K}$	1,216771991	82,90832602

3. feladat: Mi történhetett?



4. feladat: Számítási példa

Az általunk vizsgált gazdaság vállalati szektora az $Y = 6,32K^{0,22}L^{0,78}$ formában adott termelési függvénnyel hozza létre outputját. A munkakínálat és a tőkekínálat rögzített, $L^S = 7,630$ és $K^S = 89,32$.

1. Adjuk meg a munkakeresleti függvény egyenletét!
2. Vezessük le a tőkekeresleti függvény egyenletét!
3. Mekkora lesz a munkapiaci egyensúlyt biztosító reálbér?
4. Számítsuk ki a tőkepiaci egyensúlyt biztosító reálbérleti díj nagyságát!
5. Rajzoljuk fel a munkakeresleti és munkakínálati függvényt, és jelöljük az egyensúlyi reálbért!

Megoldás: Munkakeresleti függvény

$$w = \frac{\partial Y}{\partial L} = 0,78 \cdot 6,32K^{0,22}L^{-0,22} = 0,78 \cdot 6,32K^{0,22}L^{-0,22} \cdot \frac{L}{L} = 0,78 \frac{6,32K^{0,22}L^{0,78}}{L} = 0,78 \frac{Y}{L}$$

$$\text{Átrendezve: } L^D = 0,78 \frac{Y}{w}$$

Tőkekeresleti függvény:

$$r^K = \frac{\partial Y}{\partial K} = 0,22 \cdot 6,32K^{-0,78}L^{0,78} = 0,22 \cdot 6,32K^{-0,78} \cdot \frac{K}{K}L^{0,78} = 0,22 \frac{6,32K^{0,22}L^{0,78}}{K} = 0,22 \frac{Y}{K}$$

$$\text{Átrendezve: } K^D = 0,22 \frac{Y}{r^K}$$

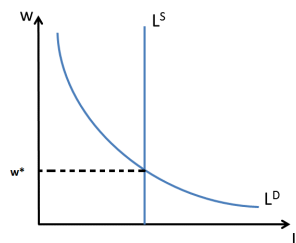
Reálbér:

$$Y = 6,32K^{0,22}L^{0,78} = 6,32 \cdot 89,32^{0,22} \cdot 7,63^{0,78} = 82,8505$$

$$w = 0,78 \frac{Y}{L} = 0,78 \cdot 82,8505 / 7,63 = 8,4696$$

Reálbérleti díj:

$$r^K = 0,22 \cdot Y / K = 0,22 \frac{82,8505}{89,32} = 0,2041$$



5. feladat: Termelékenység

Tegyük fel, hogy az alábbi függvény írja le Mexikó és Spanyolország termelési függvényét:

$$Y = AK^{0,3}L^{0,7}$$

Country	L = Population (millions)	K = Capital (trillion)	Y = Output (trillion)
Mexico	105	0.18	1.0
Spain	45	0.74	1.7

- Számítsa ki mindkét ország termelékenységi mutatóját!
- Számítsa ki mindkét ország egy főre eső jövedelmét!
- Mi lehet az egy főre eső jövedelemben tapasztalható különbség oka?

Megoldás:

Az egyszerűség kedvéért milliárdokba átszámított értékeket használunk:

Termelékenységek:

$$A_{Mexico} = \frac{1000}{180^{0,3} \cdot 0,105^{0,7}} \approx 1019,97$$

$$A_{Spain} = \frac{1700}{740^{0,3} \cdot 0,045^{0,7}} \approx 2053,2$$

Az egy főre eső jövedelem a jövedelem és a népesség hányadosa:

$$\frac{Y}{L}_{Mexico} = \frac{1000}{0,105} \approx 9523,81$$

$$\frac{Y}{L}_{Spain} = \frac{1700}{0,045} \approx 37777,78$$

A spanyolok magasabb egy főre eső jövedelmének egyik oka az, hogy a spanyol termelékenység magasabb, ez pedig mind a munka, mind a tőke termelékenységét emeli. A másik ok a spanyolok magasabb tőke-munka aránya, ami megemeli a munka termelékenységét.

(Vegyük észre, hogy az egy főre eső jövedelem ettől a két tényezőtől függ, mivel: $\frac{Y}{L} = \frac{A \cdot K^{0,3} L^{0,7}}{L} = \frac{A \cdot K^{0,3}}{L^{0,3}} = A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{0,3}$.)

6. feladat: Számítási példa

Tegyük fel, hogy egy gazdaságban a termelési függvény Cobb-Douglas típusú, a tőke kitevője $\alpha = 0,3$, és csak két termelési tényezőt, tőkét és munkát alkalmaznak a termelés során.

1. A jövedelem mekkora hányada jut tőkére és munkára, és mekkora lesz a profit?
2. Hogyan adható meg a tőke bérleti díja $\frac{K}{L}$ függvényében?
3. Hogyan adható meg a reálbér $\frac{K}{L}$ függvényében?
4. Tegyük fel, hogy a munkaerő-állomány 10 százalékkal megnő. Hogyan alakul ennek hatására a $\frac{K}{L}$ arány?
5. Felhasználva az előző kérdésre adott választ, hogyan alakul a tőke reálbérleti díja és a reálbér?
6. Közgazdaságilag hogyan értelmezhető a tényezőjövedelmek értékében bekövetkezett változás a munkaerő-állomány növekedése után?
7. Ismert az alábbi összefüggés a növekedési ütemek között:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \alpha \frac{\Delta K}{K} + (1 - \alpha) \frac{\Delta L}{L}$$

Ez alapján mit tudunk mondani, a kibocsátás hány százalékkal változik a munkaerő-állomány 10 százalékos növekedése miatt?

Megoldás: Jövedelem megoszlása: 30 százalék tőketulajdonosok, 70 százalék munkaerő.

A tőke reálbérleti díjához szükséges lesz az $\frac{Y}{K}$ arány meghatározása. Ezt úgy kaphatjuk meg, ha az $\frac{Y}{L}$ arányt elosztjuk $\frac{K}{L}$ aránnyal, tehát az egy főre jutó kibocsátást az egy főre jutó tőkeállománnyal. Előbbi felírható ebben a formában:

$$\frac{Y}{L} = A \cdot \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha$$

Az osztás után megkapjuk, hogy

$$\frac{Y}{K} = A \cdot \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha-1}$$

Tehát a **tőke bérleti díja**:

$$r^K = \alpha \cdot A \cdot \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha-1}$$

Reálbér: Mivel az $\frac{Y}{L}$ arány ismert $\frac{K}{L}$ függvényében, egy egyszerű behelyettesítésből megkapható a reálbér:

$$w = (1 - \alpha) A \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha$$

Ha a **munkaerő ceteris paribus 10 százalékkal nő**, az csökkenteni fogja az egy főre eső tőke értékét.

Ennek hatására a képletből adódóan a **reálbér csökken, a reál bérleti díj emelkedik** (grafikusan is belátható).

A munka 10 százalékos növekedése $(1 - \alpha) \cdot 10$ százalékkal, tehát 7 százalékkal emeli meg a kibocsátást.

7. feladat: Ábrázolás

1. Egy súlyos betegség az adott gazdaság munkaerejének számottevő részét kidönti, így nem tudnak dolgozni.
2. A mesterséges intelligencia nyújtotta lehetőségeket hatékonyan kihasználják a termelés folyamán.
3. A klímaváltozás negatív hatásaként tomboló tűzvész a tőkeállomány jelentős pusztulását okozza.
4. Az adott gazdaságba bevándorló munkaerő feltölti a betöltetlen állásokat.
5. A kiéleződő közel-keleti konfliktusok jelentős mértékben visszavetik az olajtermelést.
6. A gazdaság fogyasztóinak megváltozik a magatartása (hála a Kormány *Vásárolj kevesebbet, spórolj többet!* programjának), és ezentúl több megtakarítást eszközölnek, amelyekből több tőke beüzemelését finanszírozzák.
7. Az eddigi 8 órás munkanapok helyett 4 órára állnak át a gazdaságban, ám ennek hatására a munkavállalók kipihentebbek, termelékenyebbek lesznek.

8. feladat: Számítási példa

A vizsgált gazdaságban $Y = 24981$ egységnyi terméket és szolgáltatás állít elő a vállalati szektor. A fogyasztók a rendelkezésre álló jövedelem 72 százalékát fordítják fogyasztási célokra, a beruházási magatartást az $I = 7000,98 - 2,10r$ egyenlet jellemzi.

1. Adjuk meg a megtakarítási függvény egyenletét!
2. Határozzuk meg, mekkora kamat biztosít egyensúlyt a kölcsönözhető források piacán!
3. Egyensúlyi állapotban mekkora lesz a fogyasztás, a beruházás és a megtakarítás nagysága?

Megoldás: Megtakarítási függvény:

$$S = (1 - MPC)Y = 0,28Y$$

Egyensúlyi kamat:

$$S = 0,28Y = 6994,68$$

$$S = I$$

$$6994,68 = 7000,98 - 2,10r \rightarrow r = 3$$

Fogyasztás, beruházás, megtakarítás:

$$C = MPC \cdot Y = 0,72 \cdot 24981 = 17986,32$$

$$I = S = (1 - MPC)Y = 0,28 \cdot 24981 = 6994,68$$

9. feladat: Számítási példa

Az általunk vizsgált gazdaság szereplőinek magatartását az alábbi függvények segítségével jellemezhetjük.

$$Y = 2,15K^{0,24}L^{0,76}$$

$$L^S = 65$$

$$K^S = 185$$

$$C = 0,76Y$$

$$I = 51,11069929 - 2r$$

1. Mekkora a gazdaság GDP-je?
2. Mekkora az egyensúlyi kamat?
3. Jelöljük az egyensúlyi kamatot egy megfelelő ábrán!

Megoldás: GDP:

$$Y = 2,15K^{0,24}L^{0,76} = 2,15 \cdot 184^{0,24} \cdot 65^{0,76} = 179,6279137$$

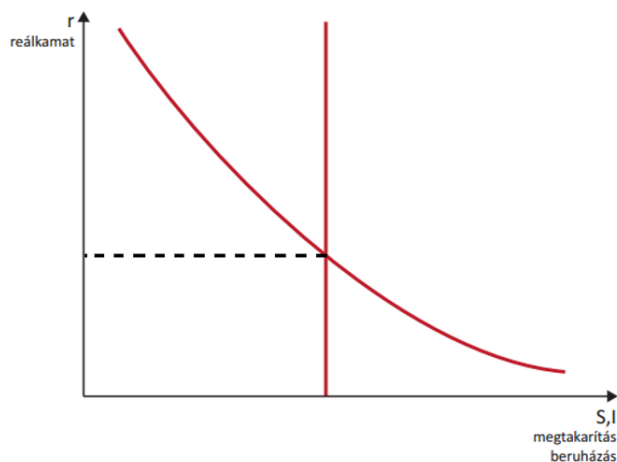
Egyensúlyi kamat:

$$S = (1 - MPC)Y = 0,24 \cdot 179,6279137 = 43,11069929$$

$$S = I$$

$$43,11069929 = 51,11069929 - 200r$$

$$r = 4$$



10. feladat: Számítási példa

Egy klasszikus modellel jellemezhető gazdaságban a termelési függvény az $Y = 3K^{0,4}L^{0,6}$ alakot ölti.

1. Adja meg a tőkekeresleti görbe egyenletét!
2. Adja meg a munkakeresleti görbe egyenletét!
3. Mekkora az egy főre eső tőkeállomány, ha tudjuk, hogy az egyensúlyi reálbér értéke $w = 3$?
4. Mekkora a tőke reál bérleti díjának egyensúlyi értéke?
5. Határozza meg az egy főre jutó kibocsátás nagyságát!

Megoldás:

Tőkekereslet: $0,4 \frac{Y}{K} = r^K$

Munkakereslet: $0,6 \frac{Y}{L} = w$

Definícióból fakadóan: $\frac{Y}{L} = y$

Tehát $0,6y = 3$, amelyből kiszámolható, hogy az **egy főre eső kibocsátás** $y = 5$.

Definícióból adódóan $y = Ak^\alpha$, amelyből kapható, hogy az **egy főre eső tőkeállomány** $k = 2,5$.

Mivel $k = \frac{K}{L}$, és $\frac{Y}{L}$ ismert, a matematika szabályai alapján megkapható, hogy $\frac{Y}{K} = 2$. Ebből a tőkekeresleti függvénybe helyettesítve kapható, hogy a **tőke reálbérleti díja** $r^K = 0,8$.